2016

السادس العلمي

الرياضيات

الفصل الأول

الأعداد المركبة

Complex Numbers

إعداد الأستاذ

حسين عبد زيد خلف

إعداديةالأصيل المركزية

07802543623

الفصل الأول

Chapter One

Complex Numbers الاعداد المركبة

العدد المركب : يقال للعدد $c = a + b\,i$

حيث : a , b عددان حقيقيان & $i = \sqrt{-1}$ عدداً مركباً .

يسمى (a) جزؤه الحقيقي (Real Part)

يسمى (b) جزؤه التخيلي (Imaginary Part)

ويرمز الى مجموعة الأعداد المركبة بالرمز $\mathbb{C}$

الصيغة العادية للعدد المركب ($c = a + b\,i$) (او الصيغة الجبرية)

أمثلة

① $\sqrt{-16} = \sqrt{16 \times -1} = \sqrt{16}\,.\,\sqrt{-1} = 4\,i = 0 + 4\,i$

② $\sqrt{-25} = \sqrt{25 \times -1} = \sqrt{25}\,.\,\sqrt{-1} = 5\,i = 0 + 5\,i$

③ $3 + \sqrt{-12} = 3 + \sqrt{12}\,.\,\sqrt{-1} = 3 + 2\sqrt{3}\,i$

④ $-4 + \sqrt{-15} = -4 + \sqrt{15}\,.\,\sqrt{-1} = -4 + \sqrt{15}\,i$

⑤ $\sqrt{9} + \sqrt{-4} = 3 + \sqrt{4}\,.\,\sqrt{-1} = 3 + 2\,i$

⑥ $-5 = -5 + 0\,i$

⑦ $-1 - \sqrt{-3} = -1 - \sqrt{3}\,.\,\sqrt{-1} = -1 - \sqrt{3}\,i$

⑧ $\dfrac{1+\sqrt{-25}}{4} = \dfrac{1+\sqrt{25}\,i}{4} = \dfrac{1+5\,i}{4} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{5\,i}{4}$

موبايل 07802543623

ملاحظة

يمكن كتابة العدد المركب ($c = a + bi$) (الصيغة العددية)
بالصيغة الديكارتية (a , b) . حيث a , b عددان حقيقيان
فالعدد (a) يمكن كتابته بالشكل ($a + 0i$) أو ($a , 0$) (حقيقي بحت)
والعدد (i) حيث ($i = 0 + i$) ⇐ ($0 , 1$) (تخيلي بحت)

فمثلاً العدد $-2 + 3i$ عدد مركب جزؤه الحقيقي (-2) والتخيلي (3) .
العدد 5 عدد مركب جزؤه الحقيقي (5) والتخيلي (0) .
العدد $3i$ عدد مركب جزؤه الحقيقي (0) والتخيلي (3)

قوى

عند رفع (i) لعدد صحيح موجب فالناتج يكون أحد عناصر المجموعة $\{ 1 , -1 , i , -i \}$ حيث تقسم أس (i) على (4) والباقي هو الأس الجديد الى (i)

أمثلة

اكتب بالصيغة العادية للعدد المركب

[1] $i^2 = -1 = -1 + 0i \Rightarrow (-1 , 0)$

[2] $i^3 = i^2 \cdot i = (-1)\, i = -i = 0 - i \Rightarrow (0 , -1)$

[3] $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1 = 1 + 0i \Rightarrow (1 , 0)$

[4] $i^{27} = i^{4(6)+3} = i^3 = -i = 0 - i \Rightarrow (0 , -1)$

[5] $i^{81} = i^{4(20)+1} = i = 0 + i \Rightarrow (0 , 1)$

[6] $i^{10} = i^{4(2)+2} = i^2 = (-1) = -1 + 0i \Rightarrow (-1 , 0)$

[7] $i^{100} = i^{4(25)+0} = i^0 = 1 = 1 + 0i \Rightarrow (1 , 0)$

[8] $i^{58} = i^{4(14)+2} = i^2 = (-1) = -1 + 0i \Rightarrow (-1 , 0)$

موبايل 07802543623

[9] $i^{-13} = \frac{1}{i^{13}} = \frac{1}{i} = \frac{i^4}{i} = i^3 = -i = 0 - i \Rightarrow (0, -1)$

[10] $i^{-33} = \frac{1}{i^{33}} = \frac{1}{i} = -i = 0 - i \Rightarrow (0, -1)$

[11] $i^{-28} = \frac{1}{i^{28}} = \frac{1}{i^0} = \frac{1}{1} = 1 = 1 + 0i \Rightarrow (1, 0)$

[12] $i^{12n+93} = i^{12n} \cdot i^{93} = (i^4)^{3n} \cdot i^{4(23)+1} = (1)^{3n} \cdot i$

$= i = 0 + i \Rightarrow (0, 1)$

[13] $i^{4n+6} = i^{4n} \cdot i^6 = (i^4)^n \cdot i^{4(1)+2} = (1)^n \cdot i^2$

$= (1)(-1) = (-1) = -1 + 0i \Rightarrow (-1, 0)$

بصورة عامة

$$i^{4n+r} = i^r, n \in \quad, r = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

[14] $i^{8n-5} = i^{8n} \cdot i^{-5} = (i^4)^{2n} \cdot \frac{1}{i^5} = (1)^{2n} \cdot \frac{1}{i}$

$= (1) \cdot \frac{i^4}{i} = i^3 = -i = 0 - i$

$\frac{\text{عدد}}{i} = -\text{عدد}\ i$ ❁❁ $\frac{n}{i} = -n\,i$

فقط في حالة (i) (حالة خاصة)

موبايل 07802543623

أمثلة

ضع على صورة $a + bi$ كل مما يأتي

[1]

$$(\sqrt{-9})^3 = (\sqrt{9}\,\sqrt{-1})^3 = (3i)^3 = (3)^3\,(i)^3 = 27\,(-i)$$

$$= -27i = 0 - 27i \Rightarrow (0 \text{ ، } -27)$$

[2]

$$(\sqrt{-2})^4 = (\sqrt{2}\,.i)^4 = (\sqrt{2})^4.\,(i)^4 = 4\,(1) = 4$$

$$= 4 + 0i \Rightarrow (4 \text{ ، } 0)$$

[3]

$$(\sqrt{-3})^5 = (\sqrt{3}\,.i)^5 = (\sqrt{3})^5.(i)^5 = 9\,(\sqrt{3})\,i$$

$$= 0 + 9\,(\sqrt{3})\,i \Rightarrow (0\,,\,9\,(\sqrt{3}))$$

مجموعة الأعداد الحقيقية R هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد المركبة ℂ أي ان : □

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset ℂ$$

الناجح هو من أحسن استغلال الوقت، في حين ضيعه غيره

موبايل 07802543623

تساوي الأعداد المركبة

$c_1 = a_1 + b_1 i$ = $c_2 = a_2 + b_2 i$

$$c_1 = c_2 \iff a_1 = a_2 \ , \ b_1 = b_2$$

أي يتساوى العددان المركبان إذا تساوى جزءاهما الحقيقيان وتساوى جزءاهما التخيليان وبالعكس

Ex. جد قيمة كل من (x, y) الحقيقتين اللتين تحققان المعادلة الآتية ؟

$$2x - 1 + 2i = 1 + (y+1)i$$

Sol

$2x - 1 = 1$
$2x = 1 + 1$
$2x = 2$
$\boxed{x = 1}$

$2 = y + 1$
$2 - 1 = y$
$\boxed{y = 1}$

Ex. جد قيمة كل من (x, y) الحقيقتين اللتين تحققان المعادلة الآتية ؟

$$3x + 4i = 2 + 8yi$$

Sol

$3x = 2$
$\boxed{x = \frac{2}{3}}$

$\frac{4}{8} = \frac{8y}{8}$
$\boxed{y = \frac{1}{2}}$

Ex. جد قيمة كل من (x, y) الحقيقتين اللتين تحققان المعادلة الآتية ؟

$$(2y+1) - (2x-1)i = -8 + 3i$$

Sol

$2y + 1 = -8$
$2y = -8 - 1$
$2y = -9$
$\boxed{y = \frac{-9}{2}}$

$-(2x - 1) = 3$
$-2x + 1 = 3$
$-2x = 3 - 1$
$-2x =$
$\boxed{x = -1}$

موبايل 07802543623

الأستاذ : حسين عبد زيد خلف

العمليات على مجموعة الأعداد المركبة

أولاً عملية الجمع على مجموعة الأعداد المركبة

ليكن $c_2 = a_2 + b_2 i$ ، $c_1 = a_1 + b_1 i$

فإن $c_1 + c_2 = (a_1 + a_2) + (b_2 + b_1)i$

$\because$ $b_2 + b_1 \in R$ ، $a_1 + a_2 \in R$

لان مجموعة الأعداد الحقيقية مغلقة تحت عملية الجمع

$(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \in ₵$

أمثلة جد مجموع العددين المركبين في كل مما يأتي .

❶ $3 + 4\sqrt{2}i \ , \ 5 - 2\sqrt{2}\ i$

$3 + 4\sqrt{2}i + 5 - 2\sqrt{2}\ i = 8 + 2\sqrt{2}\,i$

❷ $3 , 2 - 5i$

$(3 + 0i) + (2 - 5i) = 5 - 5i$

❸ $1 - i \ , \ 3i$

$(1 - i) + (0 + 3i) = (1 + 2i)$

Ex. جد $(x + y)$ بحيث $x = 5 + \sqrt{-9}$, $y = 3 + 2i^7$

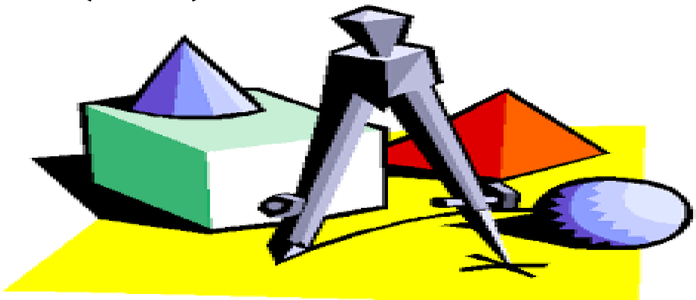
Sol $(x + y) = (5 + \sqrt{-9}) + (3 + 2i^7)$

$= (5 + 3i) + (3 - 2i)$

$= (8 + i)$

$\sqrt{-9} = 3i$

$i^7 = i^3 = -i$



خواص عملية الجمع على مجموعة الأعداد المركبة

أذا كان $\forall \ c_1 \ , c_2 \ , c_3 \in \mathbb{C}$

فإن

1. $c_1 + c_2 = c_2 + c_1$ هي علاقة ابدالية

2. $c_1 + (c_2 + c_3) = (c_1 + c_2) + c_3$ العلاقة تجميعية

3. $\forall \ c \in \mathbb{C} \ ، \ c = a + b\,i \ , \ \exists \ -c = -a - b\,i \in \mathbb{C}$ النظير الجمعي

4. $e = 0 = 0 + 0\,i \in \mathbb{C}$ العنصر المحايد الجمعي

$\therefore \ (\mathbb{C} \ ، \ +)$ زمرة ابدالية

ملاحظة

إن طرح أي عدد مركب من أخر يساوي حاصل جمع العدد المركب الأول مع النظير الجمعي للعدد المركب الثاني

Ex. جد ناتج $(7 - 13\,i) - (9 + 4\,i)$

Sol $(7 - 13\,i) + (-9 - 4\,i) = (-2 - 17\,i)$

Ex. حل المعادلة $(2 - 4\,i) + x = -5 + i$

حيث $x \in \mathbb{C}$

Sol

بإضافة $(-2 + 4\,i)$ للطرفين ينتج

$$(2 - 4\,i) + (-2 + 4\,i) + x = (-5 + i) + (-2 + 4\,i)$$

$$x = -7 + 5\,i$$

موبايل 07802543623

Ex. جد ناتج $-3\, i^{5} + i^{2} - 4 + 6\, i^{-73}$

Sol $-3\,i + (-1) - 4 - 6\,i \;=\; -5 \;-9\,i$

$i^{5} = i$ ، $i^{2} = -1$

$i^{-73} = \dfrac{1}{i^{73}} = \dfrac{1}{i} = -\,i$

ثانيا
عملية الضرب على مجموعة الأعداد المركبة

ليكن $c_1 = a_1 + b_1 i$ ، $c_2 = a_2 + b_2 i$

فإن

$$c_1 \,.\, c_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)$$
$$= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^{2}$$
$$= a_1 a_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i + b_1 b_2 i^{2}$$
$$= a_1 a_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i + b_1 b_2 (-1)$$
$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

$(a_1 a_2 - b_1 b_2) \in R \;,\; (a_1 b_2 + a_2 b_1) \in R$

لأن R مغلق تحت عملية الضرب

$\therefore\; c_1 \,.\, c_2 \in \mathbb{C}$

أي أن مجموعة الأعداد المركبة مغلقة تحت عملية الضرب

إذا كان $c = a + b\,i$ $K \in R$

فإن $K c = Ka + Kb\,i$

Ex. جد ناتج كلاً مما يأتي :

[①] $(2 - 3\,i)\,(3 - 5\,i)$

Sol $6 - 10\,i - 9\,i + 15\,i^{2} = 6 - 19\,i - 15 = -9 \;-19\,i$

[②] $(3 - 4\,i)^{2}$ $i^{2} = -1$

Sol $(3)^{2} + 2(3)(4\,i) + (16)\,i^{2} = 9 - 24\,i - 16 = -7 + 24\,i$

موبايل 07802543623

مفكوك حدانية

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

[③] $i(1+i)$

Sol $i + i^2 = i - 1 = -1 + i$

[④] $\frac{-5}{2}(4+3i)$

Sol $(\frac{-5}{2})\, 4 + (\frac{-5}{2})(3i) = -10 - (\frac{15\,i}{2})$

[⑤] $(1+i)^2 + (1-i)^2$

Sol $(1 + 2i - 1) + (1 - 2i - 1) = (2i) + (-2i) = 0 + 0i$

خواص عملية الضرب على مجموعة الأعداد المركبة

أذا كان $\forall\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$

فإن

1. $c_1 \times c_2 = c_2 \times c_1$

الخاصية الابدالية

2. $c_1 \times (c_2 \times c_3) = (c_1 \times c_2) \times c_3$

الخاصية التجميعية

3. $1 = 1 + 0i$

العنصر المحايد

4. $\forall\ c \neq 0 + 0i ،\ \exists\ \frac{1}{c} \in \mathbb{C} ،\ c \times \frac{1}{c} = 1 + 0i$

أي أن لكل عدد مركب c عدا الصفر يوجد له نظير ضربي $\frac{1}{c}$ ينتمي الى $\mathbb{C}$

أي أن $(\mathbb{C} - (0 + 0i), \times)$ زمرة ابدالية

أي أن $(\mathbb{C}, +, \times)$ حقل يسمى حقل الأعداد المركبة .

Ex. جد ناتج كلاً مما يأتي بالصيغة العادية للعدد المركب

$i^{11} = i^{3} = -i$

$\sqrt{-2} = \sqrt{2}\, i$

① $(\sqrt{2} + i^{11})\ (1 + \sqrt{-2})$

Sol $= (\sqrt{2} - i)\ (1 + \sqrt{2}\, i)$

$= \sqrt{2} + 2i - i + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} + i$

② $(1 + i)\ (2 + i)\ (3 + i)$

Sol $= (2 + i + 2i - 1)\ (3 + i) = (1 + 3i)(3 + i)$

$= (3 + i + 9i - 3) = (0 + 10i)$

③ $(3 + 2i)^2\ (1 + 3i)^2$

Sol $= (9 + 12i - 4)\ (1 + 6i - 9)$

$= (5 + 12i)\ (-8 + 6i) = (-40 + 30i - 96i - 72)$

$= (-112 - 66i)$

④ $(1 + i)^{10}$

Sol $= [(1 + i)^2]^5 = [1 + 2i - 1]^5 = (2i)^5 = (2)^5 . i^5$

$= 32\, i = 0 + 32\, i$

⑤ $(2 - 2i)^5$

Sol $= (2 - 2i)^4\ (2 - 2i) = [(2 - 2i)^2]^2\ (2 - 2i)$

$= [4 - 8i - 4]^2\ (2 - 2i) = (8i)^2\ (2 - 2i)$

$= (-8)^2 (i)^2\ (2 - 2i) = 64(-1)\ (2 - 2i)$

$= -128 + 128\, i$

⑥ $(1 + i)^3 + (1 - i)^3$

Sol $= (1 + i)^2\ (1 + i) + (1 - i)^2\ (1 - i)$

$= (1 + 2i - 1)\ (1 + i) + (1 - 2i - 1)\ (1 - i)$

$= 2i\ (1 + i) + (-2i)\ (1 - i) = (2i - 2) + (-2i - 2)$

$= 0i - 4 = -4 + 0i$

موبايل 07802543623

Ex. إذا كان $x = -1 + 2i$ فجد قيمة $x^2 + 2x + 5$

Sol
$$= (-1 + 2i)^2 + 2(-1 + 2i) + 5$$
$$= (+1 - 4i - 4) - 2 + 4i + 5$$
$$= -3 - 4i + 3 + 4i = 0 + 0i = 0$$

Ex. جد قيمة x, y الحقيقيتين اللتين تحققان المعادلة $y + 5i = (2x + i)(x + 2i)$

Sol
$$y + 5i = (2x + i)(x + 2i)$$
$$y + 5i = 2x^2 + 4xi + xi - 2$$
$$y + 5i = 2x^2 - 2 + 5xi$$
$$y = 2x^2 - 2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$5 = 5x \Rightarrow \boxed{x = 1}$$ نعوض في (1)
$$y = 2(1)^2 - 2 \Rightarrow \boxed{y = 2 - 2 = 0}$$

Ex. برهن أن $(1 - i)(1 - i^2)(1 - i^3) = +4$

Sol
L.H.S $(1 - i)(1 - i^2)(1 - i^3)$
$$= (1 - i)(1 + 1)(1 + i)$$
$$= 2(1 - i)(1 + i) = 2(1 + i - i + 1)$$
$$= 2(1 + 1) = 2(2) = +4$$
L.H.S = R.H.S

Ex. أثبت أن $\left(\sqrt{(3 + 4i)} + \sqrt{(3 - 4i)}\right)^2 = 16$

Sol
L.H.S $\left(\sqrt{(3 + 4i)} + \sqrt{(3 - 4i)}\right)^2$
$$= \left(\sqrt{(3 + 4i)}\right)^2 + 2\left(\sqrt{(3 + 4i)}\sqrt{(3 - 4i)}\right) + \left(\sqrt{(3 - 4i)}\right)^2$$
$$= ((3 + 4i) + 2\left(\sqrt{(3 + 4i)(3 - 4i)}\right) + (3 - 4i)$$
$$= 6 + 2\left(\sqrt{9 - 12i + 12i + 16}\right.$$
$$= 6 + 2\sqrt{25} = 6 + 2(5) = 16$$
L.H.S = R.H.S

مرافق العدد المركب

مرافق العدد المركب $c = a + bi$ هو العدد $\bar{c} = a - bi$ $\forall\ a, b \in R$

النظير الضربي	النظير الجمعي	المرافق	العدد المركب
$\frac{1}{a+bi}$	$-c = -a - bi$	$\bar{c} = a - bi$	$c = a + bi$
$\frac{1}{3+i}$	$-3 - i$	$3 - i$	$3 + i$
$\frac{1}{-5-4i}$	$5 + 4i$	$-5 + 4i$	$-5 - 4i$
$\frac{1}{i} = -i$	$-i$	$-i$	i
$\frac{1}{7}$	-7	7	7

خواص العدد المرافق

1. $\overline{c_1 \pm c_2} = \overline{c_1} \pm \overline{c_2}$
2. $\overline{c_1 . c_2} = \overline{c_1} . \overline{c_2}$
3. $\bar{\bar{c}} = c$
4. إذا كان $c = a + bi$ فإن $c . \bar{c} = a^2 + b^2$
5. $c + \bar{c} = 2a$
6. إذا كان $c \in R$ $\bar{c} = c$
7. $\overline{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)} = \frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}}$ ، $c_2 \neq 0$

موبايل 07802543623

Ex.

إذا كان $c_1 = 1+ i$ ، $c_2 = 3 - 2i$ فتحقق من .

[1] $\overline{c_1 \pm c_2} = \overline{c_1} \pm \overline{c_2}$ ، [2] $\overline{c_1 . c_2} = \overline{c_1} . \overline{c_2}$

Sol

[1] L . H . C : $\overline{c_1 + c_2} = \overline{(1+ i) + (3-2i)}$

$= \overline{4 - i} = 4 + i$

R . H . C : $\overline{c_1} + \overline{c_2} = \overline{(1+i)} + \overline{(3-2i)}$

$= 1 - i + (3+2i) = 4 + i = \overline{c_1 + c_2}$

$\therefore \quad \overline{c_1 + c_2} = \overline{c_1} + \overline{c_2}$

[2] L . H . C : $\overline{c_1 . c_2} = \overline{(1+ i) + (3-2i)}$

$= \overline{(3 - 2i + 3i + 2)} = \overline{(5+i)} = 5 - i$

R . H . C : $\overline{c_1} . \overline{c_2} = \overline{(1+i)} . \overline{(3-2i)}$

$= (1-i)(3+2i) = (3 + 2i - 3i + 2)$

$= 5 - i = \overline{c_1 . c_2}$

$\therefore \quad \overline{c_1 . c_2} = \overline{c_1} . \overline{c_2}$

Ex.

جد النظير الجمعي للعدد $c = 2 - 2i$ ثم جد النظير الضربي وضعه بالصيغة العادية للعدد المركب .

Sol

العدد $c = 2 - 2i$ النظير الجمعي $-c = -2 + 2i$

النظير الضربي $\frac{1}{c} = \frac{1}{2-2i}$

$$\frac{1}{2-2i} \times \frac{2+2i}{2+2i} = \frac{2+2i}{4+4} = \frac{2+2i}{8} = \frac{2}{8} + \frac{2i}{8}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} i$$

Ex.

ضع العدد $\frac{3-2i}{5+i}$ بالصيغة العادية للعدد المركب .

Sol

$$\frac{3-2i}{5+i} = \frac{3-2i}{5+i} \times \frac{5-i}{5-i} = \frac{15 - 3i - 10i - 2}{25+1}$$

$$= \frac{13 - 13i}{26} = \frac{13}{26} - \frac{13i}{26} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} i$$

Ex.

إذا كان $c_1 = 3-2i$ ، $c_2 = 1 + i$ فتحقق من $\overline{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)} = \frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}}$.

Sol

$$L.H.C \quad \overline{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)} = \overline{\left(\frac{3-2i}{1+i}\right)} = \overline{\left(\frac{3-2i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i}\right)}$$

$$\overline{\left(\frac{3-3i-2i-2}{1+1}\right)} = \overline{\left(\frac{1-5i}{2}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{2} - \frac{5i}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{5i}{2}$$

$$R.H.C \quad \frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}} = \frac{\overline{3-2i}}{\overline{1+i}} = \frac{3+2i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{3+3i+2i-2}{1+1}$$

$$= \frac{1+5i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i \quad \therefore \overline{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)} = \frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}}$$

Ex. ضع كلاً مما يأتي بالصورة $c = a + bi$

1 $\frac{1+i}{1-i}$

$$\frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+i+i-1}{1+1} = \frac{2i}{2} = i = 0 + i$$

2 $\frac{2-i}{3+4i}$

$$\frac{2-i}{3+4i} \times \frac{3-4i}{3-4i} = \frac{6-8i-3i-4}{9+16} = \frac{2-11i}{25} = \frac{2}{25} - \frac{11i}{25}$$

3 $\frac{1+2i}{-2+i}$

$$\frac{1+2i}{-2+i} \times \frac{-2-i}{-2-i} = \frac{-2-i-4i+2}{4+1} = \frac{0-5i}{5} = 0 - i$$

أدرس من اجل هؤلاء يريدون فشلك

مسيرتي في السادس

Ex. جد ناتج ما يأتي

1 $(1+i)(2+i)(3-i)^{-1}$

$$= \frac{(1+i)(2+i)}{(3-i)} \times \frac{3+i}{3+i} = \frac{(2+i+2i-1)(3+i)}{9+1}$$

$$= \frac{(1+3i)(3+i)}{10} = \frac{3+i+9i-3}{10} = \frac{10i}{10} = i = 0+i$$

2 $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^5}$

$$\frac{(1+i)^5}{(1-i)^5} = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5 = \left(\frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i}\right)^5 = \left(\frac{1+i+i-1}{1+1}\right)^5$$

$$= \left(\frac{2i}{2}\right)^5 = i^5 = i = 0+i$$

3 $\dfrac{64}{(1-i)^6}$

$$= \frac{64}{(1-i)^6} = \frac{2^6}{(1-i)^6} = \left(\frac{2}{1-i}\right)^6 = \left(\frac{2}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i}\right)^6$$

$$= \left(\frac{2(1+i)}{1+1}\right)^6 = \left(\frac{2(1+i)}{2}\right)^6 = (1+i)^6 = \left[(1+i)^2\right]^3$$

$$= \left[1+2i-1\right]^3 = (2i)^3 = (2)^3\, i^3 = 8(i)^3 = 8(-i)$$

$$= -8i = 0-8i$$

4 $\dfrac{(2+i)^7}{(1-2i)^6}$

$$= \frac{(2+i)^7}{(1-2i)^6} = \frac{(2+i)^6\,(2+i)}{(1-2i)^6} = \left(\frac{2+i}{1-2i}\right)^6 (2+i)$$

$$= \left(\frac{2+i}{1-2i} \times \frac{1+2i}{1+2i}\right)^6 (2+i) = \left(\frac{2+4i+i-2}{1+4}\right)^6 (2+i)$$

$$= \left(\frac{5i}{5}\right)^6 (2+i) = i^6\,(2+i) = i^2\,(2+i)$$

$$= (-1)\,(2+i) = -2-i$$

Ex. اكتب العدد $\frac{5-i}{1-i}$ بالصيغة العادية للعدد المركب واكتب نظيره الجمعي

So

$$\frac{5-i}{1-i} = \frac{5-i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{5+5i-i+1}{1+1} = \frac{6+4i}{2}$$

$$= \frac{6}{2} + \frac{4i}{2} = 3+2i$$

$-3-2i$ النظير الجمعي

Ex. اثبت أن $\frac{3i}{\sqrt{2}+i} - \frac{3i}{\sqrt{2}-i} = 2$

So

$$L.H.C : \frac{3i}{\sqrt{2}+i} \times \frac{\sqrt{2}-i}{\sqrt{2}-i} - \frac{3i}{\sqrt{2}-i} \times \frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}+i}$$

$$= \frac{3i(\sqrt{2}-i)}{2+1} - \frac{3i(\sqrt{2}+i)}{2+1} = \frac{3i(\sqrt{2}-i)}{3} - \frac{3i(\sqrt{2}+i)}{3}$$

$$= (\sqrt{2}i+1) - (\sqrt{2}i-1) = (\sqrt{2}i+1) + (-\sqrt{2}i+1) = 2$$

$$L.H.C = R.H.C = 2$$

Ex. إذا كان $M = \frac{13-i}{4+i}$, $L = \frac{(6-3i)+(1+2i^5)}{2-i}$ هل أن M , L مترافقان

So

$$M = \frac{13-i}{4+i} = \frac{13-i}{4+i} \times \frac{4-i}{4-i} = \frac{52-13i-4i-1}{16+1}$$

$$= \frac{52-13i-4i-1}{16+1} = \frac{51-17i}{17} = \frac{51}{17} - \frac{17i}{17} = 3-i$$

$$\boxed{i^5 = i}$$

$$L = \frac{(6-3i)+(1+2i^5)}{2-i} = \frac{(6-3i)+(1+2i)}{2-i}$$

$$= \frac{7-i}{2-i} = \frac{7-i}{2-i} \times \frac{2+i}{2+i} = \frac{14+7i-2i+1}{4+1} = \frac{15+5i}{5}$$

$$= \frac{15}{5} + \frac{5\,i}{5} = 3 + i$$

$\therefore$ M , L مترافقان

Ex. إذا كان $\frac{3-2i}{i}$ ، $\frac{x-y\,i}{1+5\,i}$ مترافقان فجد قيمة كل من $x, y \in R$

So

$$\frac{3-2i}{i} = \overline{\frac{x-y\,i}{1+5\,i}} \Rightarrow \frac{3-2i}{i} = \frac{x+y\,i}{1-5\,i}$$

$$i\,(x + y\,i) = (3-2i)\,(1-5\,i)$$

$$xi - y = 3 - 15i - 2\,i - 10$$

$$xi - y = -7 - 17i$$

$$(-y = -7) \times (-1) \Rightarrow y = 7$$

$$x = -17$$

تحليل مقدار الى عاملين

يمكن تحليل $x^2 + y^2$ الى حاصل ضرب عددين مركبين كل منهما عن صورة $a + bi$ وذلك

$$x^2 + y^2 = x^2 - y^2 i^2 = (x + yi)(x - yi)$$

Ex. حلل كل من العددين 10 ، 53 الى حاصل ضرب عاملين من صورة $a + bi$ حيث a , b عددين نسبيين .

Sol

$-i^2$　　　　　　　　$-i^2$

$10 = 1 + 9$　　or　　$10 = 9 + 1$

$= 1 - 9i^2$　　　　$= 9 - i^2$

$= (1 + 3i)(1 - 3i)$　　　　$= (3 + i)(3 - i)$

$-i^2$　　　　　　　　$-i^2$

$53 = 4 + 49$　　or　　$53 = 49 + 4$

$= 4 - 49i^2$　　　　$= 49 - 4i^2$

$= (2 + 7i)(2 - 7i)$　　　　$= (7 + 2i)(7 - 2i)$

Ex. حلل كل من يلي الى عاملين من صورة $a + bi$ حيث a , b عددين نسبيين .

① $x^3 + i$

$-i^2$

$= x^3 + i = x^3 - i^3 = (x - i)(x^2 + xi - 1)$

② $x^2 - 8xi - 7$

$-i^2$

$= x^2 - 8xi - 7 = x^2 - 8xi + 7i^2$

$= (x - 7i)(x - i)$

③ $x^2 - 7xi - 12$

$-i^2$

$= x^2 - 7xi - 12 = x^2 - 7xi + 12i^2$

$= (x - 3i)(x - 4i)$

Ex. جد قيمة $a , b \in R$ للمعادلة $(2+i)(a+bi) = -1+7i$
ثم جد قيمة a^2+b^2

Sol

$(2+i)(a+bi) = -1+7i$

$$= \frac{(2+i)(a+bi)}{2+i} = \frac{-1+7i}{2+i}$$

$$(a+bi) = \frac{-1+7i}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i} = \frac{-2+i+14i+7}{4+1}$$

$$= \frac{5+15i}{5} = \frac{5}{5} + \frac{15i}{5} = 1+3i$$

$$a = 1 \ , \ b = 3$$

$$a^2+b^2 = (1)^2 + (3)^2 = 1+9 = 10$$

Ex. جد قيمة $c , d \in R$ للمعادلة $(6-2i)(c+di) = 40$

Sol

$(6-2i)(c+di) = 40$

$$= \frac{(c+di)(6-2i)}{(6-2i)} = \frac{40}{(6-2i)}$$

$$(c+di) = \frac{40}{(6-2i)} \times \frac{(6+2i)}{(6+2i)} = \frac{40(6+2i)}{36+4} = \frac{40(6+2i)}{40}$$

$$(c+di) = (6+2i) \Rightarrow c = 6 \ , \ d = 2$$

Ex. جد قيمة $x , y \in R$ للمعادلة $(a+bi)(x+yi) = 1$

Sol

$(a+bi)(x+yi) = 1$

$$= \frac{(a+bi)(x+yi)}{(a+bi)} = \frac{1}{(a+bi)}$$

$$(x+yi) = \frac{1}{(a+bi)} \times \frac{(a-bi)}{(a-bi)} = \frac{(a-bi)}{a^2+b^2}$$

$$(x+yi) = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{bi}{a^2+b^2}$$

موبايل 07802543623

$$x = \frac{a}{a^2+b^2} \quad , \quad y = \frac{-b}{a^2+b^2}$$

Ex. جد قيمة x , y الحقيقيتين التي تحقق المعادلة

$$\frac{2-i}{1+i}x + \frac{3-i}{2+i}y = \frac{1}{i}$$

Sol

$$\frac{2-i}{1+i}x + \frac{3-i}{2+i}y = \frac{1}{i}$$

$$\left(\frac{2-i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i}\right)x + \left(\frac{3-i}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i}\right)y = \frac{1}{i} \times \frac{-i}{-i}$$

$$\left(\frac{2-2i-i-1}{1+1}\right)x + \left(\frac{6-3i-2i-1}{4+1}\right)y = \frac{-i}{1}$$

$$\left(\frac{1-3i}{2}\right)x + \left(\frac{5-5i}{5}\right)y = -i$$

$$\left(\frac{1-3i}{2}\right)x + \left(\frac{5(1-i)}{5}\right)y = -i$$

$$\left(\frac{1-3i}{2}\right)x + (1-i)y = -i \qquad \times 2$$

$$x - 3xi + 2y - 2yi = -2i$$

$$x + 2y = 0 \quad \text{...........} \quad (1)$$

$$-3x - 2y = -2 \quad \text{...........} \quad (2)$$

بالجمع

$$-2x = -2 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

نعوض في

$$x + 2y = 0 \quad \text{...........} \quad (1)$$

$$1 + 2y = 0 \Rightarrow \boxed{y = \frac{-1}{2}}$$

Ex. جد قيمة x , y للمعادلة

$$\frac{y}{1+i} = \frac{x^2+4}{x+2i}$$

Sol

$$\frac{y}{1+i} = \frac{x^2+4}{x+2i} \qquad -i^2$$

موبايل 07802543623

$$\frac{y}{1+i} = \frac{x^2-4i^2}{x+2i} = \frac{(x+2i)(x-2i)}{x+2i}$$

$$\frac{y}{1+i} = (x-2i)$$

$$y = (x-2i)(1+i) = x-2i + xi + 2$$

$$y = x + 2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

(التخيلي) $0 = x - 2 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

نعوضها في (1) $\quad y = 2 + 2 = 4$

Ex. جد قيمة x , y للمعادلة $\dfrac{x^2+9y^2}{x-3yi} = \left(\dfrac{1+2i}{2-i}\right)^7$

Sol

$$\frac{x^2+9y^2}{x-3yi} = \left(\frac{1+2i}{2-i}\right)^7 \qquad -i^2$$

$$\frac{x^2+9y^2}{x-3yi} = \left(\frac{1+2i}{2-i} \times \frac{2+i}{2+i}\right)^7$$

$$\frac{x^2-9y^2i^2}{x-3yi} = \left(\frac{2+i+4i-2}{4+1}\right)^7$$

$$\frac{(x+3yi)(x-3yi)}{x-3yi} = \left(\frac{5i}{5}\right)^7 = i^7 = i^3$$

$$(x+3yi) = (0-i)$$

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad 3y = -1 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{3}$

• الفرق بين الإنسان الناجح والآخرين هو ليس نقص القوّة، ولا نقص المعرفة، إنّما نقص الإرادة.

الجذور التربيعية للعدد المركب

لإيجاد الجذر ألتربيعي للعدد المركب (اي جذر يحتوي على i) يتم بإحدى الطريقتين : -

الطريقة الأولى : - الطريقة العامة

نفرض $\sqrt{\text{عدد مركب}} = x + yi$

Ex. جد الجذر ألتربيعي للعدد $c = 8 + 6i$

Sol

نفرض $x + yi = \sqrt{8 + 6i}$

بتربيع الطرفين $(x + yi)^2 = 8 + 6i$

$$x^2 + 2xyi - y^2 = 8 + 6i$$

$$x^2 - y^2 = 8 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$2xy = 6 \Rightarrow y = \frac{6}{2x} \Rightarrow y = \frac{3}{x} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

بتعويض (2) في (1) $\quad x^2 - \frac{9}{x^2} = 8$

بضرب الطرفين بـ x^2 ينتج $\quad x^4 - 9 = 8x^2$

$$x^4 - 8x^2 - 9 = 0$$

$$(x^2 - 9)\underbrace{(x^2 + 1)}_{\text{يهمل}} = 0$$

أما $(x^2 - 9) = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

نعوض قيمة x في المعادلة (2)

عندما $x = +3 \;::\; y = \frac{3}{x} = \frac{3}{3} \Rightarrow y = 1 \Rightarrow 3 + i$

عندما $x = -3 \;::\; y = \frac{3}{x} = \frac{3}{-3} \Rightarrow y = -1 \Rightarrow -3 - i$

موبايل 07802543623

Ex. جد الجذور التربيعية للأعداد

1 -25

$c^2 = -25 \Rightarrow c = \sqrt{-25} \Rightarrow c = \pm 5i$

2 -17

$c^2 = -17 \Rightarrow c = \sqrt{-17} \Rightarrow c = \pm\sqrt{17}\, i$

3 $-i$

نفرض $x + yi = \sqrt{-i}$

بتربيع الطرفين $(x + yi)^2 = -i$

$x^2 + 2xyi - y^2 = 0 - i$

$x^2 - y^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ (1)$

$2xy = -1 \Rightarrow y = \dfrac{-1}{2x} \quad \ldots\ldots\ (2)$

بتعويض (2) في (1) ينتج $x^2 - \left(\dfrac{-1}{2x}\right)^2 = 0$

بضرب الطرفين بـ $4x^2$ $\quad x^2 - \dfrac{1}{4x^2} = 0$

$4x^4 - 1 = 0$

$(2x^2 + 1)(2x^2 - 1) = 0$

يهمل

$2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

نعوض قيمة x في المعادلة (2)

عندما $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \ :: \ y = \dfrac{-1}{2\frac{1}{\sqrt{2}}} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} i$

عندما $x = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \ :: \ y = \dfrac{-1}{2\frac{-1}{\sqrt{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \dfrac{-1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} i$

موبايل 07802543623

4 $8i$

نفرض $x + yi = \sqrt{8i}$

بتربيع الطرفين $(x + yi)^2 = 8i$

$x^2 + 2xyi - y^2 = 0 + 8i$

$x^2 - y^2 = 0$ .... (1)

$2xy = 8 \Rightarrow y = \frac{4}{x}$ .... (2)

بتعويض (2) في (1) ينتج $x^2 - (\frac{4}{x})^2 = 0$

بضرب الطرفين بـ x^2 $\quad x^2 - \frac{16}{x^2} = 0$

$x^4 - 16 = 0$

$(x^2 + 4)(x^2 - 4) = 0$

يهمل

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

نعوض قيمة x في المعادلة (2)

عندما $x = 2 :: y = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow 2 + 2i$

عندما $x = -2 :: y = \frac{4}{-2} = -2 \Rightarrow -2 - 2i$

Ex. جد الجذر ألتربيعي للعدد المركب $\frac{4}{1-\sqrt{3}i}$

Sol

$$\frac{4}{1-\sqrt{3}i} = \frac{4}{1-\sqrt{3}i} \times \frac{1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i} = \frac{4(1+\sqrt{3}i)}{1+3} = \frac{4(1+\sqrt{3}i)}{4}$$

$= (1 + \sqrt{3}i)$

نفرض $x + yi = \sqrt{1 + \sqrt{3}i}$

بتربيع الطرفين $(x + yi)^2 = \sqrt{1 + \sqrt{3}i}^{\,2}$

$x^2 + 2xyi - y^2 = (1 + \sqrt{3}i)$

$x^2 - y^2 = 1$ .... (1)

موبايل 07802543623

$2xy = \sqrt{3} \Rightarrow y = \dfrac{\sqrt{3}}{2x}$ .... (2)

بتعويض (2) في (1) ينتج

$x^2 - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2x}\right)^2 = 1$

$x^2 - \dfrac{3}{4x^2} = 1$

بضرب الطرفين بـ $4x^2$ ينتج

$4x^4 - 3 = 4x^2 \Rightarrow 4x^4 - 4x^2 - 3 = 0$

$(2x^2 - 3)\underbrace{(2x^2 + 1)}_{\text{يهمل}} = 0$

$2x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = \dfrac{3}{2} \Rightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

نعوض قيمة x في المعادلة (2)

عندما $x = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ :: $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i$

عندما $x = \dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ :: $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}i$

$\sqrt{8+6i}$

الطريقة الثانية : - طريقة الدليل .

3

الجزء التخيلي ⇘ ⇙ الجزء الحقيقي

1 3

تربيع ⇓ ⇓

$9 - 1 = 8$

الحقيقي

$= \sqrt{9+6i-1}$

$= \sqrt{9+6i+i^2}$

$= \sqrt{(3+i)^2}$

$= \pm(3+i)$

موبايل 07802543623

$\sqrt{1+\sqrt{3}\,i}$

$$\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{3}\,i-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{3}\,i+\frac{i^2}{2}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$= \pm\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\,i\right)$$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\swarrow \quad \searrow$

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$\sqrt{-i}$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}-i-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}-i+\frac{i^2}{2}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\,i\right)^2}$$

$$= \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\,i\right)$$

$\frac{1}{2}$

$\swarrow \quad \searrow$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

$\sqrt{8\,i}$

$$= \sqrt{4+8i-4} = \sqrt{4+8i+4i^2}$$

$$= \sqrt{(2+2i)^2}$$

$$= \pm(2+2i)$$

4

$\swarrow \quad \searrow$

$2 \qquad 2$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$4 - 4 = 0$

$-5-12\,i$

$$= \sqrt{4-12i-9} = \sqrt{4-12i+9i^2}$$

$$= \sqrt{(2-3i)^2} = \pm(2-3i)$$

6

$\swarrow \quad \searrow$

$2 \qquad 3$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$4 - 9 = -5$

موبايل 07802543623

$$15-8i$$

$$= \sqrt{16-8i-1} = \sqrt{16-8i+i^2}$$

$$= \sqrt{(4-i)^2} = \pm\,(4-i)$$

$4i$

$4 \quad 1$

$16 - 1 = 15$

حل المعادلة التربيعية في $\mathbb{C}$

إن المعادلة ax^2+bx+c

حيث $a \neq 0$ وإن $a, b, c \in R$ حلين يمكن ايجادهما بالدستور

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

أما إذا كان المقدار المميز b^2-4ac سالباً فانه لايوجد للمعادلة حلول حقيقية ولكن يوجد لها حلان في مجموعة الأعداد المركبة

Ex. حل المعادلة $x^2+4x+5=0$ في مجموعة الأعداد المركبة .

Sol

$$x^2+4x+5=0$$

$a=1$ ، $b=4$ ، $c=5$

$$\Delta = b^2-4ac$$
$$= (4)^2-4(1)(5)$$
$$= 16-20 = -4$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-4 \pm 2i}{2(1)} = \frac{-4}{2} \pm \frac{2i}{2} = -2 \pm i$$

$$\therefore S = \{-2+i \,،\, -2-i\}$$

موبايل 07802543623

Ex. حل المعادلة $x^2 - 6x + 13 = 0$ في مجموعة الأعداد المركبة .

Sol

$x^2 - 6x + 13 = 0$

$a = 1 ،\ b = -6 ،\ c = 13$

$\Delta = b^2 - 4ac$
$= (-6)^2 - 4(1)(13)$
$= 36 - 52 = -16$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{+6 \pm \sqrt{-16}}{2(1)}$$

$$x = \frac{6 \pm 4i}{2(1)} = \frac{6}{2} \pm \frac{4i}{2} = 3 \pm 2i$$

$$S = \{3 + 2i ،\ 3 - 2i\}$$

Ex. حل المعادلة $4x^2 - 8x + 5 = 0$ في $\mathbb{C}$.

Sol

$4x^2 - 8x + 5 = 0$

$a = 4 ،\ b = -8 ،\ c = 5$

$\Delta = b^2 - 4ac$
$= (-8)^2 - 4(4)(5)$
$= 64 - 80 = -16$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{+8 \pm \sqrt{-16}}{2(4)}$$

$$x = \frac{8 \pm 4i}{8} = \frac{8}{8} \pm \frac{4i}{8} = 1 \pm \frac{1}{2} i$$

$$\therefore S = \left\{1 + \frac{1}{2} i ،\ 1 - \frac{1}{2} i\right\}$$

Ex. جد مجموعة الحلول للمعادلة $Z^2 - 3Z + 3 + i = 0$ في $\mathbb{C}$.

Sol

$Z^2 - 3Z + 3 + i = 0$

$a = 1 ،\ b = -3 ،\ c = 3 + i$

$$Z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{+3 \pm \sqrt{-3-4i}}{2(1)}$$

$$Z = \frac{+3 \pm \sqrt{-3-4i}}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$\Delta = b^2 - 4ac$
$= (-3)^2 - 4(1)(3 + i)$
$= 9 - 12 - 4i$
$= -3 - 4i$

موبايل 07802543623

$$\sqrt{-3-4i} = \sqrt{1-4i-4} = \sqrt{1-4i+4i^2}$$

2
⇙ ⇘
1 2
⇓ ⇓
1 - 4 = -3

$$= \sqrt{(1-2i)^2} = \pm *(1-2i)$$

$$Z = \frac{+3 \pm \sqrt{-3-4i}}{2} \quad \ldots (1)$$ نعوضها في (1)

$$Z = \frac{+3 \pm (1-2i)}{2}$$

either $Z = \frac{+3+(1-2i)}{2} = \frac{4-2i}{2} = \frac{4}{2} - \frac{2i}{2} = 2 - i$

or $Z = \frac{+3-(1-2i)}{2} = \frac{+3-1+2i}{2} = \frac{2+2i}{2} = \frac{2}{2} + \frac{2i}{2} = 1 + i$

$\therefore \quad S = \{ 2-i \ ، \ 1+i \}$

Ex. جد مجموعة الحلول للمعادلة $Z^2 + 2Z + i(2-i) = 0$ في $\mathbb{C}$.

Sol

$Z^2 + 2Z + i(2-i) = 0$

$a = 1$ ، $b = 2$ ، $c = 2i + 1$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= (2)^2 - 4(1)(2i+1)$$
$$= 4 - 8i - 4$$
$$= -8i$$

$$Z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8i}}{2(1)}$$

$$Z = \frac{-2 \pm \sqrt{-8i}}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\sqrt{-8i} = \sqrt{4-8i-4} = \sqrt{4-8i+4i^2}$$

4
⇙ ⇘
2 2
⇓ ⇓
4 - 4 = 0

$$= \sqrt{(2-2i)^2} = \pm(2-2i)$$

$$Z = \frac{-2 \pm \sqrt{-8i}}{2} \quad \ldots (1)$$ نعوضها في (1)

$$Z = \frac{-2 \pm (2-2i)}{2}$$ ينتج

موبايل 07802543623

either $Z = \frac{-2+2-2i}{2} = \frac{-2i}{2} = -i$

or $Z = \frac{-2-2+2i)}{2} = \frac{-4+2i}{2} = \frac{-4}{2} + \frac{2i}{2} = -2+i$

$\therefore \quad S = \{ -2i \,،\, -2+i \}$

Ex. حل المعادلة $Z^2 - 2Zi + 3 = 0$ بطريقتين

Sol

الطريقة الأولى

$-i^2$

$Z^2 - 2Zi + 3 = 0$

$Z^2 - 2Zi - 3i^2 = 0$

$(Z - 3i)(Z + i) = 0$

either $Z - 3i = 0 \Rightarrow Z = 3i$

or $Z + i = 0 \Rightarrow Z = -i$

$\therefore \quad S = \{ 3i \,،\, -i \}$

الطريقة الثانية

$Z^2 - 2Zi + 3 = 0$

$a = 1 \,،\, b = -2i \,،\, c = 3$

$$Z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= (-2i)^2 - 4(1)(3)$$
$$= -4 - 12 = -16$$

$$Z = \frac{2i \pm \sqrt{-16}}{2(1)}$$

$$= \frac{2i \pm 4i}{2}$$

either $Z = \frac{2i + 4i}{2} = \frac{6i}{2} = 3i$

or $Z = \frac{2i - 4i}{2} = +\frac{-2i}{2} = -i$

$\therefore \quad S = \{ 3i \,،\, -i \}$

موبايل 07802543623

Ex. حل المعادلة $Z^2 = -12$ في $\mathbb{C}$

Sol

$$Z^2 = -12$$

بجذر الطرفين

$$Z = \pm\sqrt{-12} \Rightarrow Z = \pm 2\sqrt{3}\,i$$

$$\therefore \quad S = \{ +2\sqrt{3}\,i \,،\, -2\sqrt{3}\,i \}$$

Ex. حل المعادلة $3Z + 6i = 2i + Z + 8$ في $\mathbb{C}$

Sol

$$3Z + 6i = 2i + Z + 8$$

$$3Z - Z = 2i - 6i + 8$$

$$2Z = 8 - 4i \qquad \div 2$$

$$Z = \frac{8-4i}{2} = \frac{8}{2} - \frac{4i}{2} = 4 - 2i$$

$$\therefore \quad S = \{ 4 - 2i \}$$

Ex. حل المعادلة $Z^3 + 6Zi = 0$ في $\mathbb{C}$

Sol

$$Z^3 + 6Zi = 0$$

$$Z(Z^2 + 6i) = 0$$

either $Z = 0$

or $(Z^2 + 6i) = 0 \Rightarrow Z^2 = -6i$

$$3$$
$$\swarrow \qquad \searrow$$
$$\sqrt{3} \qquad \sqrt{3}$$
$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$
$$3 \quad - \quad 3 = 0$$

$$Z^2 = -6i$$

$$Z = \pm\sqrt{-6i}$$

$$Z = \pm\sqrt{3 - 6i - 3} = \pm\sqrt{3 - 6i + 3i^2} = \pm\sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{3}i)^2}$$

$$Z = \pm(\sqrt{3} - \sqrt{3}i)$$

$$\therefore \quad S = \{ 0 \,,\, +(\sqrt{3} - \sqrt{3}i) \,,\, (-\sqrt{3} + \sqrt{3}i) \}$$

Ex. حل المعادلة $Z^3 - 8i = 0$ في $\mathbb{C}$

Sol

$-i^2$

$Z^3 - 8i = 0$

$Z^3 + 8i^3 = 0$

$(Z + 2i)(Z^2 - 2Zi - 4) = 0$

either $Z + 2i = 0 \Rightarrow Z = -2i$

or $Z^2 - 2Zi - 4) = 0$

$a = 1$ ، $b = -2i$ ، $c = -4$

$$Z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{+2i \pm \sqrt{12}}{2(1)}$$

$$= \frac{2i \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$\Delta = b^2 - 4ac$
$= (-2i)^2 - 4(1)(-4)$
$= -4 + 16 = 12$

either $Z = \frac{2i + 2\sqrt{3}}{2} = \frac{2i}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{2} = i + \sqrt{3}$

or $Z = \frac{2i - 2\sqrt{3}}{2} = \frac{2i}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{2} = i - \sqrt{3}$

$\therefore S = \{-2i ، \sqrt{3} + i, -\sqrt{3} + i\}$

Ex. حل المعادلة $Z^4 - 25 = 0$ في $\mathbb{C}$

Sol

$Z^4 - 25 = 0$

$(Z^2 + 5)(Z^2 - 5) = 0$

either $(Z^2 + 5) = 0 \Rightarrow Z^2 = -5 \Rightarrow Z = \pm\sqrt{-5}$

$Z = \pm\sqrt{5}\, i$

or $Z^2 - 5 = 0 \Rightarrow Z^2 = 5 \Rightarrow Z = \pm\sqrt{5}$

$\therefore S = \{-\sqrt{5}\, i, +\sqrt{5}\, i ، -\sqrt{5} ، +\sqrt{5}\}$

Ex. حل المعادلة $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$ في $\mathbb{C}$

Sol

$$x^4 + 3x^2 - 4 = 0$$

$$(x^2 + 4)(x^2 - 1) = 0$$

either $(x^2 + 4) = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-4}$

$$Z = \pm 2i$$

or $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

$\therefore \; S = \{ \pm 2i \, ، \pm 1 \}$

إيجاد المعادلة التربيعية إذا علم جذراها

من الدستور نعلم ان جذري المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ التي معاملاتها الحقيقية هما

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad ، \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

و هما مترافقان

مجموع الجذرين هو $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$

حاصل ضربهما $x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$

ملاحظة

أولا : أذا كان $x + yi$ احد جذري المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$

$a \neq 0 \qquad a, b, c \in R$

والتي معاملاتها حقيقية فإن الجذر الأخر هو $x - yi$ مرافق

ثانياً : بقسمة طرفي المعادلة $a x^2 + b x + c = 0$ على $a \neq 0$

نحصل على $x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} = 0$ والتي هي عبارة عن

x^2 – (مجموع الجذرين) x + (حاصل ضرب الجذرين) = 0

ثالثاً : إذا كان العددان مترافقان

1. مجموعهما عدد حقيقي
2. حاصل ضربهما عدد حقيقي

} لا يحتوي على i {

Ex. جد المعادلة التربيعية التي جذراها $\pm (2 + 2i)$

So

x^2 – (مجموع الجذرين) x + (حاصل ضرب الجذرين) = 0

مجموع الجذرين $(2 + 2i) + (-2 - 2i) = 0$

حاصل ضرب الجذرين $(2 + 2i) \cdot (-2 - 2i)$

$= -4 - 4i - 4i + 4 = -8i$

المعادلة التربيعية هي $x^2 - 0x - 8i = 0$

$x^2 - 8i = 0 \Rightarrow x^2 = 8i$

Ex. كون المعادلة التربيعية التي معاملاتها حقيقية وأحد جذريها $3 - 4i$

So

$\because$ للمعادلة معاملات حقيقية

$\therefore$ الجذران مترافقان و هو $3 + 4i$

مجموع الجذرين $= (3 - 4i) + (3 + 4i) = 6$

حاصل ضرب الجذرين $= (3 - 4i) \cdot (3 + 4i) = 9 + 16 = 25$

المعادلة التربيعية هي $x^2 - 6x + 25 = 0$

Ex. ما المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية وأحد جذريها (i)

So

∵ للمعادلة معاملات حقيقية

∴ الجذران مترافقان والجذر الأخر $(-i)$

مجموع الجذرين $(i) + (-i) = 0$

حاصل ضرب الجذرين $(i) \cdot (-i) = 1$

المعادلة التربيعية هي $x^2 - 0x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0$

Ex. أثبت أن $\frac{2}{1+i}$ هو أحد جذري المعادلة $ix^2 + 3x + 5(i-1) = 2i$

So

$$\frac{2}{1+i} = \frac{2}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{2(1-i)}{1+1} = \frac{2(1-i)}{2} = 1-i$$

نعوض في المعادلة

$$ix^2 + 3x + 5(i-1) = 2i$$

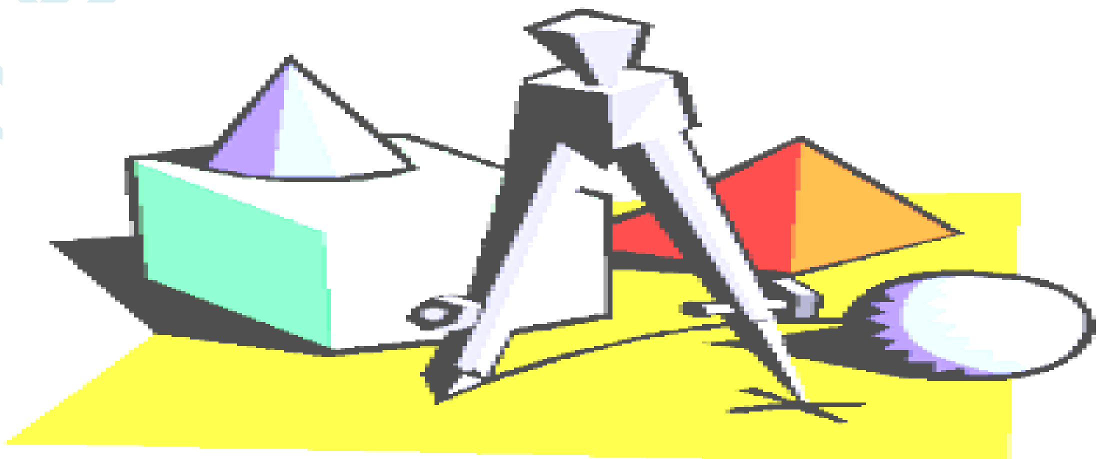
L.H.S $= i(1-i)^2 + 3(1-i) + 5i - 5$

$= i(1-2i-1) + 3 - 3i + 5i - 5$

$= i(-2i) + 2i - 2 = +2 - 2 + 2i = 2i$

L.H.S = R.H.S

∴ $\frac{2}{1+i}$ هو أحد جذري المعادلة .



موبايل 07802543623

Ex.

إذا كان $3a + bi$

هو أحد جذري المعادلة $x^2 - 9x + 22 - 6i = 0$

فجد قيمة $(a, b \in R)$

So

$x^2 - 9x + 22 + 6i = 0$

$a = 1$ ، $b = -9$ ، $c = 22 + 6i$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{+9 \pm \sqrt{-7 - 24i}}{2(1)}$

$\Delta = b^2 - 4ac$
$= (-9)^2 - 4(1)(22 + 6i)$
$= 81 - 88 - 24i$
$= -7 - 24i$

$x = \dfrac{9 \pm \sqrt{-7 - 24i}}{2}$ .... (1)

$\sqrt{-7 - 24i} = \sqrt{9 - 24i - 16}$

$= \sqrt{9 - 24i + 16i^2} = \sqrt{(3 - 4i)^2} = \pm(3 - 4i)$

$= \pm(3 - 4i)$ .... (2)

12
3   4
9 - 16 = -7

بتعويض (2) في (1) ينتج

$x = \dfrac{9 \pm \sqrt{-7 - 24i}}{2} = \dfrac{9 \pm (3 - 4i)}{2}$

either $x = \dfrac{9 + 3 - 4i}{2}$

$x = \dfrac{12 - 4i}{2} = \dfrac{12}{2} - \dfrac{4i}{2} = 6 - 2i$

or $x = \dfrac{9 - 3 + 4i}{2}$

$x = \dfrac{6 + 4i}{2} = \dfrac{6}{2} + \dfrac{4i}{2} = 3 + 2i$

1. when $3a + bi = 6 - 2i$
   $3a = 6 \Rightarrow a = 2$ ، $b = -2$
2. when $3a + bi = 3 + 2i$
   $3a = 3 \Rightarrow a = 1$ ، $b = 2$

موبايل 07802543623

Ex.

إذا كان $2-i$

هو أحد جذري المعادلة $x^2-(a+1)\,x+5=0$

فجد قيمة ❶ الجذر الأخر ❷ a

So

❶ نفرض الجذر الأخر M وأن حاصل ضرب الجذرين هو $(2-i)M$

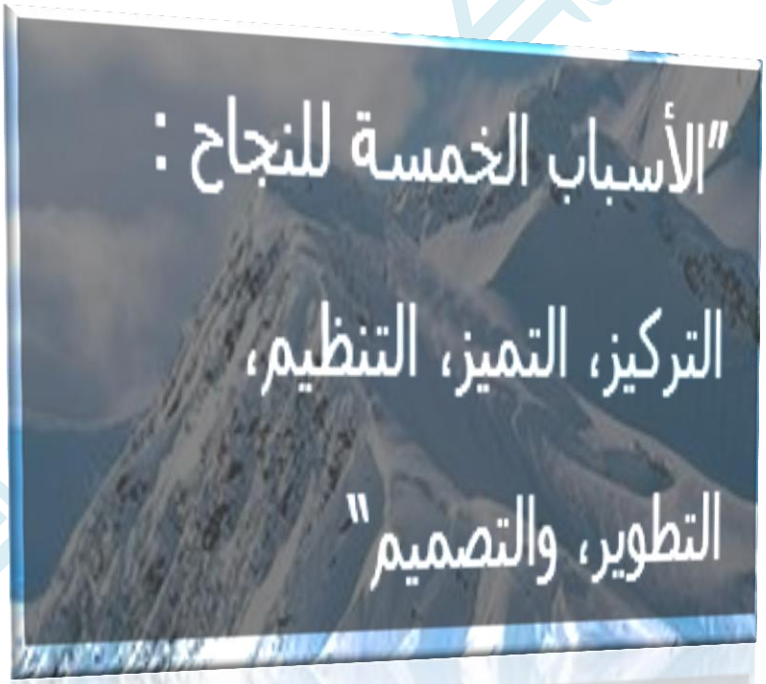
$$5=(2-i)\,M$$

$$M=\frac{5}{2-i}=\frac{5}{2-i}\times\frac{2+i}{2+i}=\frac{5(2+i)}{4+1}=\frac{5(2+i)}{5}$$

الجذر الثاني $M=2+i$

مجموع الجذرين $=(2-i)+(2+i)$

❷ $a+1=4 \Rightarrow a=4-1 \Rightarrow a=3$



موبايل 07802543623

الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

ليكن

$$Z^3 = 1$$

$$Z^3 - 1 = 0$$

$$(Z - 1)(Z^2 + Z + 1) = 0$$

either $Z - 1 = 0 \Rightarrow Z = 1$

or $Z^2 + Z + 1 = 0$

$a = 1$ ، $b = 1$ ، $c = 1$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= (1)^2 - 4(1)(1)$$
$$= 1 - 4 = -3$$

$$Z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2(1)}$$

$$Z = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$$

$$\therefore \quad S = \left\{ 1, \frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2} \right\}$$

أولا الجذور الثلاثة هي الجذر الأول عدد حقيقي والجذران الآخران عددان مركبان مترافقان

ثانياً : مربع أي من الجذرين التخيلين يساوي الجذر التخيلي الأخر

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2 = \frac{(-1+\sqrt{3}\,i)^2}{4} = \frac{1-2\sqrt{3}\,i-3}{2} = \frac{-2-2\sqrt{3}i}{4}$$

$$\frac{2(-1-\sqrt{3}i)}{4} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

ثالثاً : سوف نرمز لأحد الجذرين التخيلين بالرمز (ω) فان الجذر الأخر هو (ω^2)

لذلك تكون الجذور التكعيبية للواحد الصحيح على صورة 1 ، ω ، ω^2

موبايل 07802543623

خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

1. $1 + \omega + \omega^2 = 0$
2. $\omega^3 = 1$
3. $\omega + \omega^2 = -1$
4. $1 + \omega^2 = -\omega$
5. $1 + \omega = -\omega^2$
6. $\omega = -1 - \omega^2$
7. $\omega^2 = -1 - \omega$
8. $1 = -\omega - \omega^2$
9. $\frac{1}{\omega} = \omega^2$
10. $\frac{1}{\omega^2} = \omega$

قوى

⟦1⟧ إن قوى (ω) لإعداد صحيحة تأخذ إحدى القيم ω^2 ، ω ، 1

⟦2⟧ نقسم الأس الصحيح الموجب (القوى) على (3) فإذا كان الناتج

⟦A⟧ بدون باقي فالناتج = 1

⟦B⟧ إذا كان الباقي (1) فالناتج يكون = ω

⟦C⟧ إذا كان الباقي (2) فالناتج يكون = ω^2

Ex. جد ناتج

⟦1⟧ $\omega^4 = \omega^3 . \omega = \omega$

⟦2⟧ $\omega^6 = \omega^{3(2)+0} = \omega^0 = 1$

⟦3⟧ $\omega^5 = \omega^{3(1)+2} = \omega^2$

⟦4⟧ $\omega^{33} = \omega^{3(11)+0} = \omega^0 = 1$

⟦5⟧ $\omega^{25} = \omega^{3(8)+1} = \omega$

⟦6⟧ $\omega^{19} = \omega^{3(6)+1} = \omega$

موبايل 07802543623

[7] $\omega^{-11} = \dfrac{1}{\omega^{11}} = \dfrac{1}{\omega^{3(3)+2}} = \dfrac{1}{\omega^{2}} = \omega$

[8] $\omega^{-58} = \dfrac{1}{\omega^{58}} = \dfrac{1}{\omega^{3(19)+1}} = \dfrac{1}{\omega} = \omega^{2}$

[9] $\omega^{-67} = \dfrac{1}{\omega^{67}} = \dfrac{1}{\omega^{3(22)+1}} = \dfrac{1}{\omega} = \omega^{2}$

[10] $\omega^{3n} = (\omega^{3})^{n} = (1)^{n} = 1$

[11] $\omega^{3n-1} = \omega^{3n} . \omega^{-1} = (\omega^{3})^{n} . \dfrac{1}{\omega} = (1)^{n} \omega^{2} = \omega^{2}$

أولا $\omega^{3n+r} = \omega^{r}$ حيث n عدد صحيح & $r = 1,2,3$ □

ثانياً : باقي قسمة أس (ω) على (3) هو الأس الجديد (ω)

Ex. أثبت أن $\omega^{7} + \omega^{5} + 1 = 0$

So

$\omega^{7} + \omega^{5} + 1 = 0$

L.H.S $\omega^{7} + \omega^{5} + 1 = \omega + \omega^{2} + 1 = -1+1 = 0$

L.H.S = R.H.S

Ex. أثبت أن $(5 + 3\omega + 3\omega^{2})^{2} = -4(2 + \omega + 2\omega^{2})^{3} = 4$

So

$(5 + 3\omega + 3\omega^{2})^{2} = [5 + 3(\omega + \omega^{2})]^{2} = [5 + 3(-1)]^{2}$

$= [5 - 3]^{2} = [2]^{2} = 4$

$-4(2 + \omega + 2\omega^{2})^{3} = -4[2(1 + \omega^{2}) + \omega]^{3}$

$= -4[2(-\omega) + \omega]^{3}$

موبايل 07802543623

$$= -4\left[-\omega\right]^3 = -4(-\omega^3) = -4(-1) = 4$$

$$\therefore (5+3\omega+3\omega^2)^2 = -4(2+\omega+2\omega^2)^3 = 4$$

Ex. جد قيمة $(3\omega^{28}-3\omega^{14})^2$

So

$$(3\omega^{28}-3\omega^{14})^2 = (3\omega-3\omega^2)^2$$
$$= \left[3(\omega-\omega^2)\right]^2$$
$$= (3)^2(\omega-\omega^2)^2 = 9(\omega^2-2\omega^3+\omega^4)$$
$$= 9(\omega^2-2(1)+\omega)$$
$$= 9(-1-2) = 9(-3) = -27$$

Ex. جد قيمة $\left(1-\frac{2}{\omega^2}+\omega^2\right)\left(1+\omega-\frac{5}{\omega}\right)$

So

$$\left(1-\frac{2}{\omega^2}+\omega^2\right)\left(1+\omega-\frac{5}{\omega}\right)$$
$$= (1-2\omega+\omega^2)(1+\omega-5\omega^2)$$
$$= (-2\omega-\omega)(-\omega^2-5\omega^2) = (-3\omega)(-6\omega^2)$$
$$= 18\omega^3 = 18(1) = 18$$

Ex. جد قيمة $(3\omega^2+5\omega+4)^2$

So

$$(3\omega^2+5\omega+4)^2 = \left[3(-1-\omega)+5\omega+4\right]^2$$
$$= \left[-3-3\omega+5\omega+4\right]^2$$
$$= (1+2\omega)^2$$
$$= 1+4\omega+4\omega^2 = 1+4(\omega+\omega^2) = 1+4(-1)$$
$$= 1-4 = -3$$

موبايل 07802543623

Ex. جد قيمة $(3\omega^9 + 4\omega + 3\omega^2)^{12}$

So

$$(3\omega^9 + 4\omega + 3\omega^2)^{12} = (3(1) + 4\omega + 3\omega^2)^{12}$$
$$= (3 + 4\omega + 3\omega^2)^{12} = [3(1+\omega^2) + 4\omega]^{12}$$
$$= [3(-\omega) + 4\omega]^{12} = [-3\omega + 4\omega]^{12} = (\omega)^{12} = 1$$

Ex. جد قيمة

❶ $\dfrac{\omega^5 + \omega^7 - 1}{\omega^{10} + \omega^{98} - 2}$

$$\frac{\omega^5 + \omega^7 - 1}{\omega^{10} + \omega^{98} - 2} = \frac{\omega^2 + \omega - 1}{\omega + \omega^2 - 2} = \frac{-1-1}{-1-2} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

❷ $\sqrt{\dfrac{1+10\omega + 10\omega^2}{1-3\omega - 3\omega^2}}$

$$\sqrt{\frac{1+10\omega + 10\omega^2}{1-3\omega - 3\omega^2}} = \sqrt{\frac{1+10(\omega + \omega^2)}{1-3(\omega + \omega^2)}} = \sqrt{\frac{1+10(-1)}{1-3(-1)}}$$
$$= \sqrt{\frac{1-10}{1+3}} = \sqrt{\frac{-9}{4}} = \frac{3i}{2}$$

Ex. جد الجذر التربيعي للعدد $\dfrac{7+2\omega + 4\omega^2}{2\omega - 3}$

$$\sqrt{\frac{7+2\omega + 4\omega^2}{2\omega - 3}} = \sqrt{\frac{7+2\omega + 4(-1-\omega)}{2\omega - 3}}$$
$$= \sqrt{\frac{7+2\omega - 4 - 4\omega}{2\omega - 3}} = \sqrt{\frac{3-2\omega}{2\omega - 3}} = \sqrt{\frac{-(2\omega - 3)}{2\omega - 3}}$$
$$= \sqrt{-1} = i$$

Ex. أثبت أن

$$\frac{7+10\omega+13\omega^2}{2-3\omega+4\omega^2}=3$$

So

$$L.H.S \quad \frac{7+10\omega+13\omega^2}{2-3\omega+4\omega^2}$$

$$=\frac{7+10\omega+13(-1-\omega)}{2-3\omega+4(-1-\omega)}=\frac{7+10\omega-13-13\omega}{2-3\omega-4-4\omega}=\frac{-6-3\omega}{-2-\omega}$$

$$=\frac{3(-2-\omega)}{-2-\omega}=3 \qquad L.H.S = R.H.S$$

Ex. جد قيمة

$$\frac{3}{\omega^2+1}+\frac{3}{1+\omega}$$

So

$$\frac{3}{\omega^2+1}+\frac{3}{1+\omega}=\frac{3}{-\omega}+\frac{3}{-\omega^2}=-3\omega^2-3\omega$$

$$=-3(\omega^2+\omega)\quad -3(-1)=3$$

Ex. أثبت أن

$$\frac{2}{\omega^{16}+3}+\frac{2}{3+\omega^8}=\frac{10}{7}$$

So

$$L.H.S \quad \frac{2}{\omega^{16}+3}+\frac{2}{3+\omega^8}=\frac{2}{\omega+3}+\frac{2}{3+\omega^2}$$

$$=\frac{2(3+\omega^2)+2(3+\omega)}{(\omega+3)(3+\omega^2)}=\frac{6+2\omega^2+6+2\omega}{3\omega+\omega^3+9+3\omega^2}$$

$$=\frac{12+2(\omega^2+\omega)}{3(\omega+\omega^2)+1+9}=\frac{12+2(-1)}{3(-1)+10}=\frac{12-2}{-3+10}=\frac{10}{7}$$

$$L.H.S = R.H.S$$

Ex. جد قيمة

$$\frac{1}{2+5\omega+2\omega^2}+\frac{1}{2+2\omega+5\omega^2}$$

So

$$\frac{1}{2+5\omega+2\omega^2}+\frac{1}{2+2\omega+5\omega^2}$$

$$=\frac{1}{2\left(1+\omega^2\right)+5\omega+}+\frac{1}{2(1+\omega)+5\omega^2}$$

$$=\frac{1}{2\left(-\omega\right)+5\omega+}+\frac{1}{2(-\omega^2)+5\omega^2}=\frac{1}{-2\omega+5\omega}+\frac{1}{-2\omega^2+5\omega^2}$$

$$=\frac{1}{3\omega}+\frac{1}{3\omega^2}=\frac{1}{3}\omega^2+\frac{1}{3}\omega=\frac{1}{3}(\omega^2+\omega)$$

$$=\frac{1}{3}(-1)=\frac{-1}{3}$$

Ex. جد قيمة

$$\frac{\omega}{6+5\omega+4\omega^2}-\frac{4}{1+3\omega+5\omega^2}$$

So

$$\frac{\omega}{6+5\omega+4\omega^2}-\frac{4}{1+3\omega+5\omega^2}$$

$$=\frac{\omega}{6+5\omega+4(-1-\omega)}-\frac{4}{1+3\omega+5(-1-\omega)}$$

$$=\frac{\omega}{6+5\omega+-4-4\omega}-\frac{4}{1+3\omega+-5-5\omega}$$

$$=\frac{\omega}{2+\omega}-\frac{4}{-4-2\omega}=\frac{\omega}{2+\omega}-\frac{4}{-2(2+\omega)}$$

$$=\frac{\omega}{2+\omega}+\frac{2}{(2+\omega)}=\frac{\omega+2}{2+\omega}=1$$

موبايل 07802543623

Ex. جد قيمة

$$\frac{1}{4+3\omega+2\omega^2}+\frac{1}{2+\omega^2}$$

So

$$\frac{1}{4+3\omega+2\omega^2}+\frac{1}{2+\omega^2}=\frac{1}{4+3\omega+2(-1-\omega)}+\frac{1}{2+\omega^2}$$

$$=\frac{1}{4+3\omega+-2-2\omega}+\frac{1}{2+\omega^2}=\frac{1}{2+\omega}+\frac{1}{2+\omega^2}$$

$$=\frac{2+\omega^2+2+\omega}{(2+\omega)(2+\omega^2)}=\frac{4+\omega^2+\omega}{4+2\omega^2+2\omega+\omega^3}=\frac{4-1}{4+2(\omega^2+\omega)+1}$$

$$=\frac{3}{4+2(-1)+1}=\frac{3}{5-2}=\frac{3}{3}=1$$

Ex. أثبت أن

$$\left(\frac{1}{2+\omega}-\frac{1}{2+\omega^2}\right)^2=\frac{-1}{3}$$

So

$$\text{L.H.S}\quad\left(\frac{1}{2+\omega}-\frac{1}{2+\omega^2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{2+\omega^2-(2+\omega)}{(2+\omega)(2+\omega^2)}\right)^2=\left(\frac{2+\omega^2-2-\omega}{4+2\omega^2+2\omega+\omega^3}\right)^2$$

$$=\left(\frac{\omega^2-\omega}{4+2(\omega^2+\omega)+1}\right)^2=\left(\frac{\omega^2-\omega}{4+2(\omega^2+\omega)+1}\right)^2$$

$$=\left(\frac{\omega^2-\omega}{5+2(-1)}\right)^2=\left(\frac{\omega^2-\omega}{5-2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{\omega^2-\omega}{3}\right)^2=\frac{(\omega^2-\omega)^2}{3^2}=\frac{\omega^4-2\omega^3+\omega^2}{9}$$

$$=\frac{\omega-2+\omega^2}{9}=\frac{-1-2}{9}=\frac{-3}{9}=\frac{-1}{3}\qquad \text{L.H.S}=\text{R.H.S}$$

Ex. أثبت أن

$$\frac{7-5\omega}{7\omega^2-5}=\omega$$

So

$\omega^3=1$ أضافةخاصية

$$\text{L.H.S}\quad \frac{7-5\omega}{7\omega^2-5}=\frac{7\omega^3-5\omega}{7\omega^2-5}=\frac{\omega(7\omega^2-5)}{7\omega^2-5}=\omega$$

L.H.S = R.H.S

Ex. جد قيمة

$$\frac{a+b\omega+c\omega^2}{a\omega+b\omega^2+c}$$

So

$$\frac{a+b\omega+c\omega^2}{a\omega+b\omega^2+c}=\frac{a+b\omega+c\omega^2}{a\omega+b\omega^2+c\omega^3}$$

$\omega^3=1$ إضافة خاصية

$$=\frac{a+b\omega+c\omega^2}{\omega\ (a+b\omega+c\omega^2)}=\frac{1}{\omega}=\omega^2$$

$\frac{1}{\omega}=\omega^2$ إضافة خاصية

Ex. أثبت أن ω هو أحد جذور المعادلة $x^5+x+1=0$ ؟

So

$$x^5+x+1=0 \Rightarrow \omega \Rightarrow \omega^5+\omega+1=0$$

$$\text{L.H.S}\quad \omega^5+\omega+1=\omega^2+\omega+1=-1+1=0$$

L.H.S = R.H.S

ملاحظة

$2+3\omega^2$	مرافقة	$2+3\omega$	و بالعكس
$\omega+4\omega^2$	مرافقة	$\omega^2+4\omega$	و بالعكس
$1-5\omega$	مرافقة	$1-5\omega^2$	و بالعكس
ω	مرافقة	ω^2	و بالعكس

إيجاد المعادلة التربيعية

Ex. كون المعادلة التربيعية التي جذراها $1 - i\omega^2$ ، $1 - i\omega$

So

$$x^2 - (\text{مجموع الجذرين})\, x + (\text{حاصل ضربهما}) = 0$$

مجموع الجذرين $(1 - i\omega) + (1 - i\omega^2)$

$2 - i(\omega + \omega^2) = 2 - i(-1) = 2 + i$

حاصل ضربهما $(1 - i\omega)(1 - i\omega^2) = 1 - i\omega^2 - i\omega + i^2\omega^3$

$= 1 - i(\omega^2 + \omega) - 1(1) = +i$

$$x^2 - (2 + i)\,x + i = 0$$

Ex. كون المعادلة التربيعية التي جذراها $1 + \omega^2$ ، $1 + \omega$

So

الجذر الأول $1 + \omega = -\omega^2$ — الجذر الأخر $1 + \omega^2 = -\omega$

مجموع الجذرين $-\omega^2 + (-\omega) = -(\omega^2 + \omega) = -(-1) = 1$

حاصل ضربهما $(-\omega^2)(-\omega) = \omega^3 = 1$

$$x^2 - x + 1 = 0$$

Ex. كون المعادلة التربيعية التي جذراها $\frac{2}{1-\omega}$ ، $\frac{2}{1-\omega^2}$

So

مجموع الجذرين

$$\frac{2}{1-\omega} + \frac{2}{1-\omega^2} = \frac{2(1-\omega^2)+2(1-\omega)}{(1-\omega)(1-\omega^2)}$$

$$= \frac{2-2\omega^2+2-2\omega}{1-\omega^2-\omega+\omega^3} = \frac{4-2(\omega^2+\omega)}{1+1+1} = \frac{4-2(-1)}{3} = \frac{4+2}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

حاصل ضربهما

$$\left(\frac{2}{1-\omega}\right)\left(\frac{2}{1-\omega^2}\right) = \frac{4}{1-\omega^2-\omega+\omega^3} = \frac{4}{1+1+1} = \frac{4}{3}$$

$$x^2 - 2x + \frac{4}{3} = 0$$

موبايل 07802543623

Ex. إذا كانت $x = \dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ فجد قيمة $(x^5 + x^4)^8$

So

$$x = \frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$$

either $x = \omega$ or $x = \omega^2$

when $x = \omega \Rightarrow (\omega^5 + \omega^4)^8 = (\omega^2 + \omega)^8 = (-1)^8 = 1$

when $x = \omega^2 \Rightarrow \left[(\omega^2)^5 + (\omega^2)^4\right]^8$

$$= (\omega^{10} + \omega^8)^8 = (\omega + \omega^2)^8 = (-1)^8 = 1$$

Ex. إذا كانت $x + yi = \dfrac{-2\omega - 2\omega^2}{1-\sqrt{-3}}$ فجد قيمة $x, y \in R$

So

$$x + yi = \frac{-2\omega - 2\omega^2}{1-\sqrt{-3}} = \frac{-2(\omega + \omega^2)}{1-\sqrt{3}i} = \frac{-2(-1)}{1-\sqrt{3}i}$$

$$= \frac{2}{1-\sqrt{3}i} \times \frac{1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i} = \frac{2(1+\sqrt{3}i)}{1+3} = \frac{2(1+\sqrt{3}i)}{4}$$

$$x + yi = \frac{2(1+\sqrt{3}i)}{4} = \frac{(1+\sqrt{3}i)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$$

$$x = \frac{1}{2} \quad , y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ex. جد قيمة $x, y \in R$ التي تحقق المعادلة $\sqrt{i + \dfrac{i}{\omega^2}} = (x + yi)\,\omega$

So

$$\text{L.H.S} : \sqrt{i + \frac{i}{\omega^2}} = \sqrt{i + i\omega} = \sqrt{i(1+\omega)} = \sqrt{-i\omega^2}$$

$$\sqrt{-i}\,\omega = (x + yi)\,\omega \Rightarrow \sqrt{-i} = (x + yi) \;\ldots\ldots\; (1)$$

=

$$\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \frac{1}{\sqrt{2}} \;\; \frac{1}{\sqrt{2}} \;\Rightarrow\; \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\sqrt{-i} = \sqrt{\frac{1}{2} - i - \frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} - i + \frac{1}{2}\, i^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\, i\right)^2}$$

$$= \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\, i\right)$$

بالتعويض في (1) بدل $(x + yi)$ ينتج

$$(x + yi) = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i\right)$$

when $\quad (x + yi) = +\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad y = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

when $\quad (x + yi) = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i\right)$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i$$

$$x = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad , \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ex. جد قيمة $x , y \in R$

التي تحقق المعادلة $x + yi = 3 + 2\omega$

So

$$x + yi = 3 + 2\omega$$

$$= 3 + 2\left(\frac{-1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}\right) = 3 - 1 \pm \sqrt{3}\, i$$

$$x + yi = 2 \pm \sqrt{3}\, i$$

$$x = 2 \quad , \quad y = \pm\sqrt{3}$$

موبايل 07802543623

Ex. جد قيمة x , y الحقيقيتين للمعادلة $x + yi = \omega^2 - \omega$

So

$$x + yi = \omega^2 - \omega$$
$$= -1 - \omega - \omega = -1 - 2\omega$$
$$= -1 - 2\left(\frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}\right) = -1 + 1 \pm \sqrt{3}\,i$$
$$x + yi = 0 \pm \sqrt{3}\,i$$
$$x = 0 \quad , \quad y = \pm\sqrt{3}$$

ملاحظة

عندما لا يمكن التخلص من ω فيمكن الاستعانة بقيمة $\omega = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$ وبالعكس

Ex. جد النظير الجمعي و ألضربي للعدد

$$\left(\frac{2\omega^7+1}{\omega^{10}}\right)^2 - \left(\frac{\omega^{11}-1}{\omega^{17}}\right)^2 + i$$

So

$$\left(\frac{2\omega^7+1}{\omega^{10}}\right)^2 - \left(\frac{\omega^{11}-1}{\omega^{17}}\right)^2 + i$$
$$= \left(\frac{2\omega+1}{\omega}\right)^2 - \left(\frac{\omega^2-1}{\omega^2}\right)^2 + i$$
$$= \left(\frac{2\omega}{\omega} + \frac{1}{\omega}\right)^2 - \left(\frac{\omega^2}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)^2 + i$$
$$= (2 + \omega^2)^2 - (1 - \omega)^2 + i$$
$$= (4 + 4\omega^2 + \omega^4) - (1 - 2\omega + \omega^2) + i$$
$$= 4 + 4\omega^2 + \omega - 1 + 2\omega - \omega^2 + i$$
$$= 3 + 3\omega^2 + 3\omega + i \qquad = 3 + 3(\omega^2 + \omega) + i$$
$$= 3 + 3(-1) + i = i$$

النظير الجمعي $= -i$ ،،،،،،،، النظير ألضربي $= \frac{1}{i} = -i$

موبايل 07802543623

ملاحظة

إذا كانت

عندما   عندما

x أو $Z=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

$Z^2+Z+1=0$ معادلة تربيعية جميع معاملاتها = 1 تحل بالدستور $\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

يكون x أو $Z=\omega$ أو ω^2

Ex.

إذا كانت $Z^2+Z+1=0$ أوجد $\dfrac{1+3Z^{10}+3Z^{11}}{1-3Z^{7}-3Z^{8}}$

So

$$Z^2+Z+1=0$$

$$a=1 ،\quad b=1 ، c=1$$

$$\Delta = b^2-4ac$$
$$=(1)^2-4(1)(1)$$
$$=1-4=-3$$

$$Z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2(1)}$$

$$Z=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$$

either $\quad Z=\omega \qquad$ or $\quad Z=\omega^2$

when $Z=\omega \Rightarrow Z=\dfrac{1+3\omega^{10}+3\omega^{11}}{1-3\omega^{7}-3\omega^{8}}=\dfrac{1+3\omega+3\omega^2}{1-3\omega-3\omega^2}$

$$Z=\frac{1+3(\omega+\omega^2)}{1-3(\omega+\omega^2)}=\frac{1+3(-1)}{1-3(-1)}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

when $\quad Z=\omega^2 \Rightarrow \dfrac{1+3\omega^{20}+3\omega^{22}}{1-3\omega^{14}-3\omega^{16}}$

$$Z=\frac{1+3\omega^2+3\omega}{1-3\omega^2+3\omega}=\frac{1+3(\omega^2+\omega)}{1-3(\omega^2+\omega)}$$

$$=\frac{1+3(-1)}{1-3(-1)}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

Ex. جد الجذر ألتربيعي للعدد $\dfrac{7+\omega i+\omega^2 i}{1-\omega i-\omega^2 i}$ أوجد

So

$$\sqrt{\frac{7+\omega i+\omega^2 i}{1-\omega i-\omega^2 i}}=\sqrt{\frac{7+i(\omega+\omega^2)}{1-i(\omega+\omega^2)}}=\sqrt{\frac{7-i}{1+i}}$$

$$=\sqrt{\frac{7-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}}=\sqrt{\frac{7-7i-i-1}{1+1}}=\sqrt{\frac{6-8i}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{6}{2}-\frac{8i}{2}}=\sqrt{3-4i}$$

$$\sqrt{3-4i}$$

$$=\sqrt{4-4i-1}=\sqrt{4-4i+i^2}$$

$$\pm=\sqrt{4-4i+i^2}=\sqrt{(2-i)^2}$$

$$=\pm\ (2-i)$$

	2		
⇙		⇘	
2		1	
⇓		⇓	
4	-	1	= 3

Ex. إذا كان $L=1-\omega i\ ,\ M=1-\omega^2 i$ هل أن L, M مترافقان.

So

مجموع الجذرين

$$(1-\omega i)+(1-\omega^2 i)$$

$$=2-i(\omega+\omega^2)=2-i(-1)=2+i$$

$(2+i)$ عدد غير حقيقي $\therefore$ L, M غير مترافقان

لإثبات عددين مترافقين كل منهما بدلالة ω يجب ان نثبت . ☐

❶ مجموعهما عدد حقيقي ❷ حاصل ضربهما عدد حقيقي . ☐

وكل من مجموعهما وحاصل ضربهما خال من i , ω ☐

موبايل 07802543623

Ex. جد المعادلة التربيعية التي جذراها $\frac{2\omega^2}{i} - \omega \ ، \ \frac{2\omega}{i} - \omega^2$

So

الجذر الأول $\frac{2\omega^2}{i} - \omega = -2\omega^2 i - \omega$

الجذر الثاني $\frac{2\omega}{i} - \omega^2 = -2\omega i - \omega^2$

مجموع الجذرين $(-2\omega^2 i - \omega) + (-2\omega i - \omega^2)$

$= -2i(\omega^2 + \omega) - (\omega + \omega^2)$

$= -2i(-1) - (-1) = 2i + 1$

حاصل ضربهما $(-2\omega^2 i - \omega) . (-2\omega i - \omega^2)$

$= +4\omega^3 i^2 + 2\omega^4 i + 2\omega^2 i + \omega^3$

$= 4(1)(-1) + 2\omega i + 2\omega^2 i + 1$

$= -4 + 2i(\omega + \omega^2) + 1$

$= -3 + 2i(-1) \qquad = -3 - 2i$

x^2 - (مجموع الجذرين) x + (حاصل ضربهما) = 0

$x^2 - (2i + 1)x + (-3 - 2i) = 0$

Ex. حلل المقدار في كل مما يأتي الى عاملين

❶ $x^2 - 5x\omega^2 + 6\omega$

$x^2 - 5x\omega^2 + 6\omega = x^2 - 5x\omega^2 + 6\omega^4$

ω^3

$= (x - 2\omega^2)(x - 3\omega^2)$

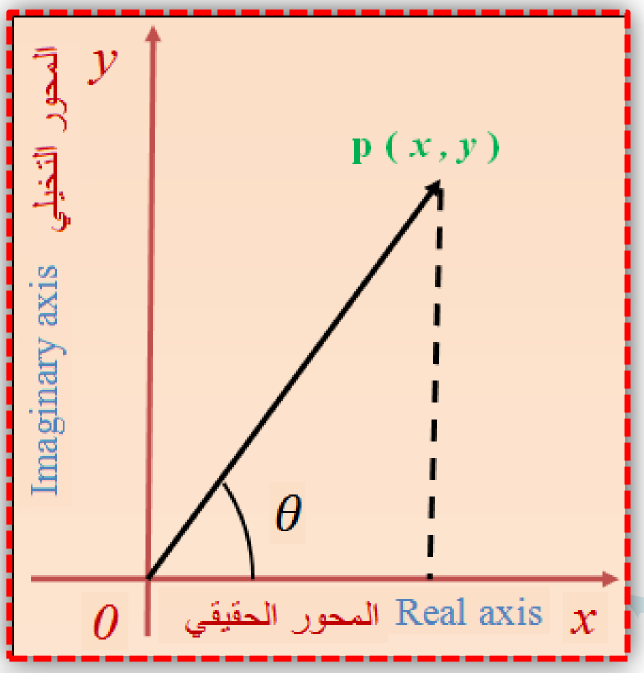
❷ $x^2 - 7x\omega^2 + 10\omega$

$x^2 - 7x\omega^2 + 10\omega = x^2 - 7x\omega^2 + 10\omega^4$

$= (x - 2\omega^2)(x - 5\omega^2)$

ω^3

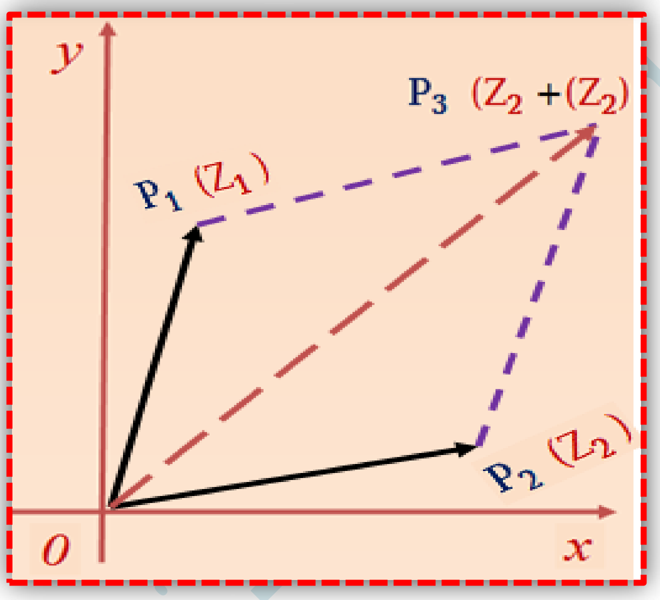
التمثيل الهندسي للأعداد المركبة



يسمى المحور السيني (x axis) المحور الحقيقي .
حيث يمثل عليه الجزء الحقيقي للعدد المركب

يسمى المحور الصادي (y axis) المحور التخيلي .
حيث يمثل عليه الجزء التخيلي للعدد المركب

العدد المركب ($x + y i$) يمثل هندسيا بالنقطة (x, y) كما في الشكل .



إذا كان $Z_1 = x_1 + y_1 i$

$Z_2 = x_2 + y_2 i$

عددان مركبان ممثلان بالنقطتين

$P_2\ (x_2, y_2)$ ، $P_1\ (x_1, y_1)$ فإن

$Z_1 + Z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\, i$

ويمكن تمثيل $Z_1 + Z_2$ بالنقطة

$P_3\ (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$

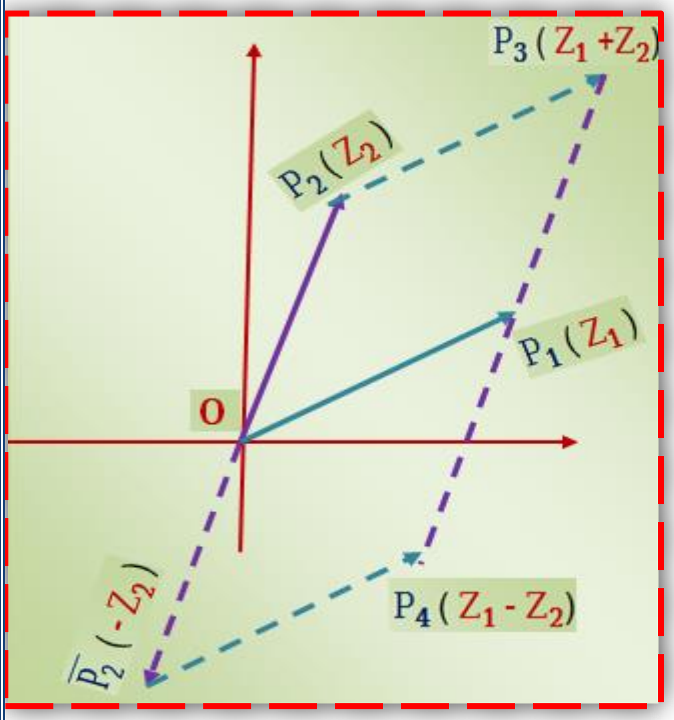
مستخدمين المعلومات المتعلقة بالمتجهات كما في الشكل

أي ان $\overrightarrow{0P_1} + \overrightarrow{0P_2} = \overrightarrow{0P_3}$

إن العدد المركب $x_1 + y_1 i$ يمكن تمثيله بالمتجه $\overrightarrow{0P}$ وعليه يكون جمع عددين مركبين هو جمع متجهين

موبايل 07802543623

إن $\bar{P}_2$ يمثل العدد المركب $-Z_1$ فإن $\bar{P}_2$
هي ناتجة من دوران $\overrightarrow{0P_2}$ حول (0) نصف دورة
وعليه فإن $Z_1+(-Z_2) = Z_1 - Z_2$
والذي يقترن بالنقطة P_4 حيث $0\,P_1\,P_4\,P_2$
يشابه متوازي الأضلاع $0\,P_1\,P_3\,P_2$ كما في الشكل



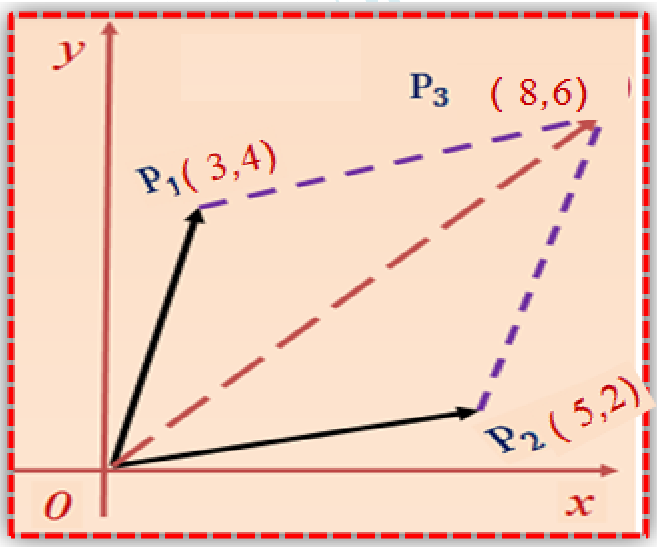
❶ ليكن K عدد حقيقي لا يساوي الصفر ، Z عدد مركب فان النقطة التي تمثل KZ يمكن الحصول عليها بواسطة التكبير الذي مركزه (0) ومعامله الثابت K .

❷ لكل عدد مركب Z فإن النقطة Zi يمكن الحصول عليها من دوران ربع دورة عكس عقارب الساعة .

Ex. مثل العمليات الآتية هندسيا في شكل ارجاند

❶ $(3+4i)+(5+2i) = 8+6i$

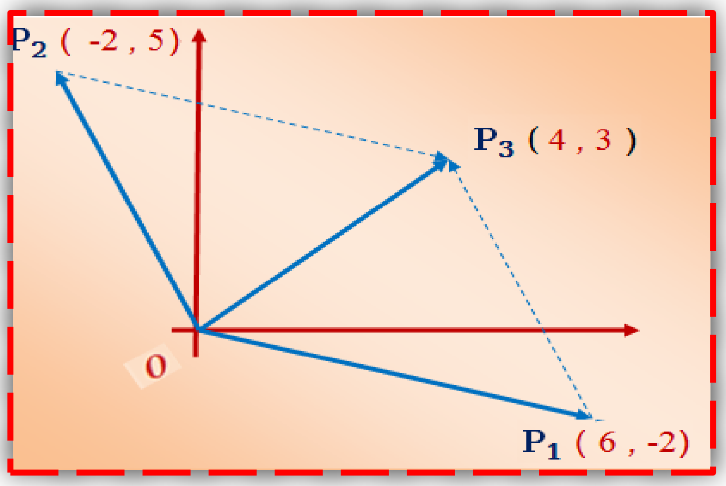
$Z_1 = 3+4i$
$P_1(Z_1) = P_1(3,4)$
$Z_2 = 3+4i$
$P_2(Z_2) = P_2(5,2)$
$Z_1+Z_2 = Z_3 = 3+4i$
$P_3(Z_3) = P_3(8,6)$



موبايل 07802543623

[❷] $(6-2i)-(2-5i)$

$(6-2i)+(-2+5i)=4+3i$



$Z_1 = 6-2i$

$P_1(Z_1) = P_1(6,-2)$

$Z_2 = -2+5i$

$P_2(Z_2) = P_2(-2,5)$

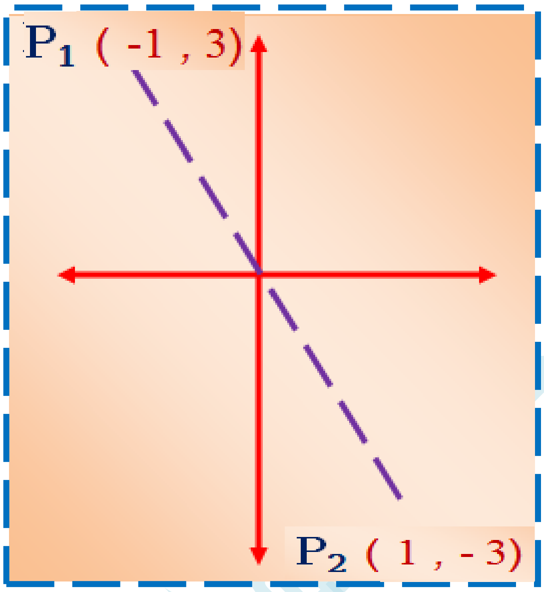
$Z_3 = 3+4i$

$P_3(Z_3) = P_3(4,3)$

Ex. إذا كان $Z=-1+3i$ اكتب النظير الجمعي ثم مثل العدد ونظيره على شكل ارجاند

$Z=-1+3i \quad P_1(-1,3)$

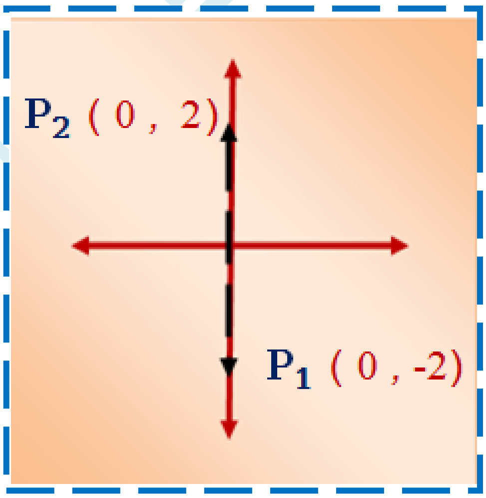
$-Z=1-3i \quad P_2(1,-3)$

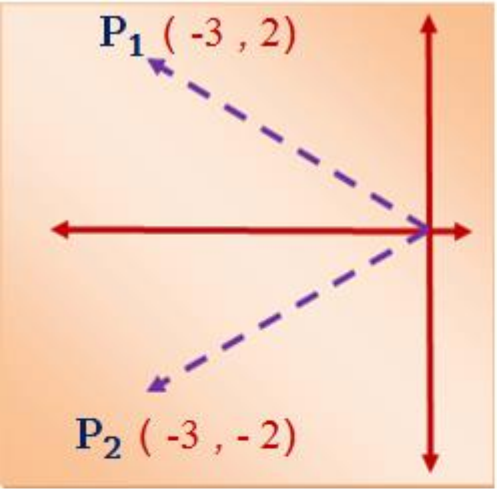


Ex. اكتب العدد المرافق ثم مثل العدد ومرافقه على شكل ارجاند

❶ $Z=-2i \Rightarrow P(Z)=P_1(0,-2)$

$\bar{Z}=2i \Rightarrow P(\bar{Z})=P_2(0,2)$



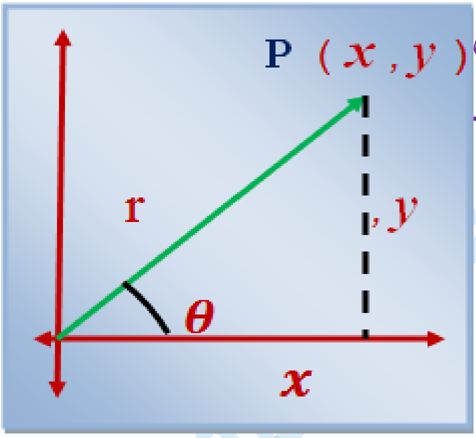


❷ $Z = -3 + 2i \Rightarrow P(Z) = P_1(-3, 2)$

$\bar{Z} = -3 - 2i \Rightarrow P(\bar{Z}) = P_2(-3, -2)$

الصيغة القطبية Polar Form للعدد

العدد المركب $Z = x + yi$ ومثلناه بالنقطة $P(x, y)$ فإن (r, θ) هما الاحداثيان القطبيان للنقطة P حيث 0 يمثل القطب و $\overrightarrow{0x}$ يمثل الضلع الابتدائي



$r = \|\overrightarrow{0P}\|$ ، $x\measuredangle = m\,\theta$ ويكون θ من $\overrightarrow{0x}$ الى $\overrightarrow{0P}$ باتجاه عكس عقارب إذا كان القياس موجبا ومع اتجاه عقارب الساعة إذا كان القياس سالبا

فيكون

الجزء الحقيقي للعدد المركب $R(Z) = x = r\cos\theta$ .... (1)

الجزء التخيلي للعدد المركب $I(Z) = y = r\sin\theta$ .... (2)

r يسمى مقياس العدد المركب (Z) هو عدد حقيقي غير سالب ويقرأ (Z) *mod* أو مقياس ويرمز له $\|Z\|$ حيث

$$r = \|Z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\|Z\|} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\|Z\|}$$

موبايل 07802543623

أما θ فقياسها يسمى سعة العدد المركب $\theta = \arg(Z)$

يمكن ان تأخذ θ عدد غير منتهي من القيم التي تختلف كل منها عن الأخرى لعدد صحيح من الدورات . فإذا كانت θ سعة عدد مركب فإن كل من الأعداد $\theta + 2\pi n$ حيث n عدد صحيح يكون أيضا سعة نفس العدد المركب .

اما إذا كانت $\theta \in [0 , 2\pi)$ الدالة على سعة العدد المركب فيقال لها القيمة الأساسية لسعة العدد المركب .

Ex. إذا كان $Z = (1 + \sqrt{3}i)$ فجد المقياس والقيمة الأساسية لسعة Z

Sol

$Z = (1 + \sqrt{3}i) \Rightarrow P(1 , \sqrt{3})$

$$r = \|Z\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\|Z\|} = \frac{1}{2} \quad ، \quad \sin\theta = \frac{y}{\|Z\|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore$ θ تقع في الربع الأول $\theta = \arg(Z) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

Ex. إذا كان $Z = (-1 - i)$ فجد المقياس والقيمة الأساسية لسعة Z

Sol

$Z = (-1 - i) \Rightarrow P(-1 , -1)$

$$r = \|Z\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\|Z\|} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad ، \quad \sin\theta = \frac{y}{\|Z\|} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$\therefore$ θ تقع في الربع الثالث $\theta = \arg(Z) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

Ex. أوجد المقياس والقيمة الأساسية لسعة كل من

❶ $Z = (-1+i)$

Sol

$Z = (-1+i) \Rightarrow P(-1, 1)$

$r = \|Z\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-1)^2+(1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{\|Z\|} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ ، $\sin\theta = \frac{y}{\|Z\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \theta$ تقع في الربع الثاني　$\theta = \arg(Z) \Rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

❷ $Z = (1-i)$

Sol

$Z = (1-i) \Rightarrow P(1, -1)$

$r = \|Z\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(1)^2+(-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{\|Z\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $\sin\theta = \frac{y}{\|Z\|} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \theta$ تقع في الربع الرابع　$\theta = \arg(Z) \Rightarrow \theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

❶ أن سعة المركب $Z = 0$ غير معرفة وذلك لان المتجه الصفري ليس له اتجاه

❷ من المقياس والقيمة الأساسية لسعة العدد المركب بكتابة العدد المركب $Z = x + yi$ بصورة اخرى تسمى الصيغة القطبية

$\because x = r\cos\theta$ ، $y = r\sin\theta$

$Z = x + yi = r\cos\theta + i\, r\sin\theta$

$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$\therefore Z = \|Z\|\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Ex. عبر عن الأعداد الآتية بالصيغة القطبية

]❶[$-2+2i$

$Z = -2 + 2i \Rightarrow P(Z)\ (-2\ ,\ +2)$

$\|Z\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-2)^2+(2)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{\|Z\|} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ ، $\sin\theta = \frac{y}{\|Z\|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \theta$ تقع في الربع الثاني

$\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

$Z = \|Z\|\ (\cos\theta + i\ \sin\theta)$

$Z = 2\sqrt{2}\ \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\ \sin\frac{3\pi}{4}\right)$

]❷[$2\sqrt{3} - 2i$

$Z = 2\sqrt{3} - 2i \Rightarrow P(Z)\ (2\sqrt{3}\ ,\ -2)$

$\|Z\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2+(-2)^2} = \sqrt{12+4} = 4$

$\cos\theta = \frac{x}{\|Z\|} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\sin\theta = \frac{y}{\|Z\|} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$

$\therefore \theta$ تقع في الربع الرابع

$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

$Z = r\ (\cos\theta + i\ \sin\theta)$

$Z = 4\ \left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\ \sin\frac{11\pi}{6}\right)$

كان نابليون بونابرت يرد بثلاث على ثلاث

من قال لا اقدر .. قال له حاول

ومن قال لا اعرف .. قال له تعلم

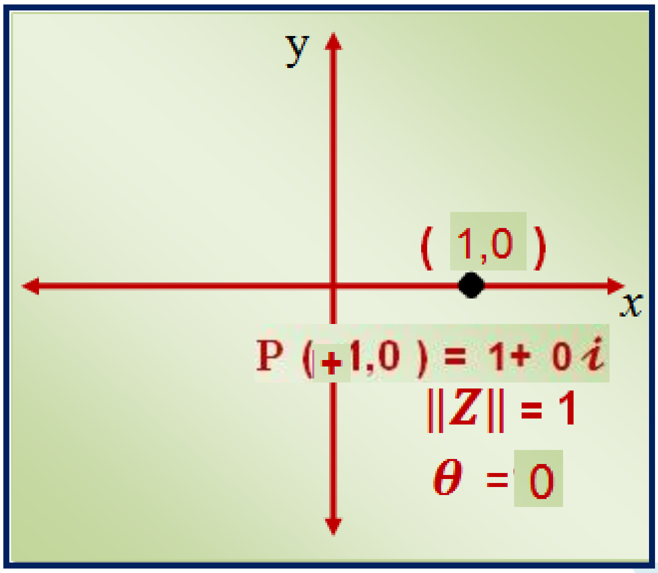
ومن قال مستحيل .. قال له جرب

موبايل 07802543623

Ex.

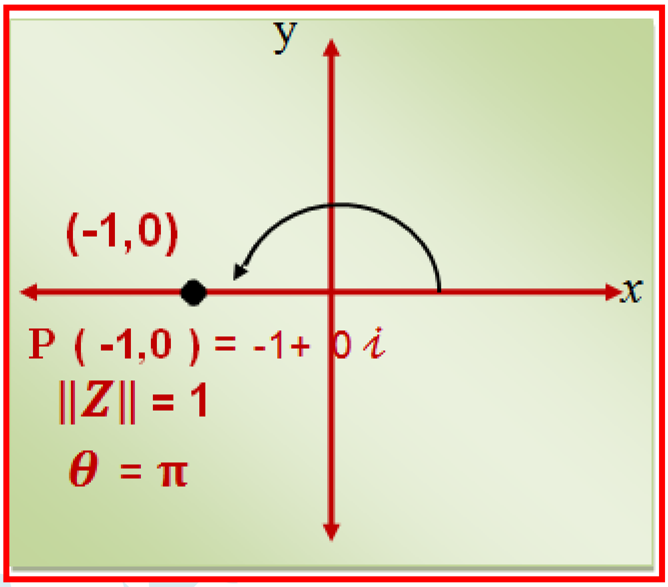
عبر عن الأعداد الآتية بالصيغة القطبية

① $1 = 1 - 0i \Rightarrow P(1,0)$



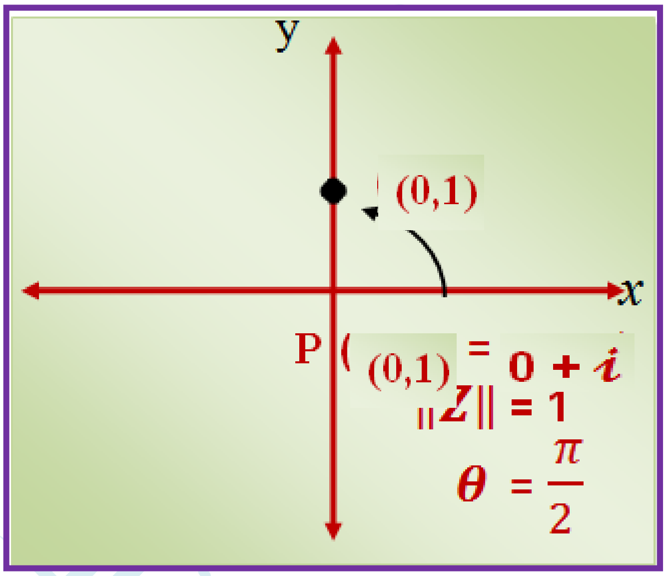
$\therefore\ Z = 1\ (\cos 0 + i \sin 0)$

② $-1 = -1 + 0i \Rightarrow P(-1,0)$



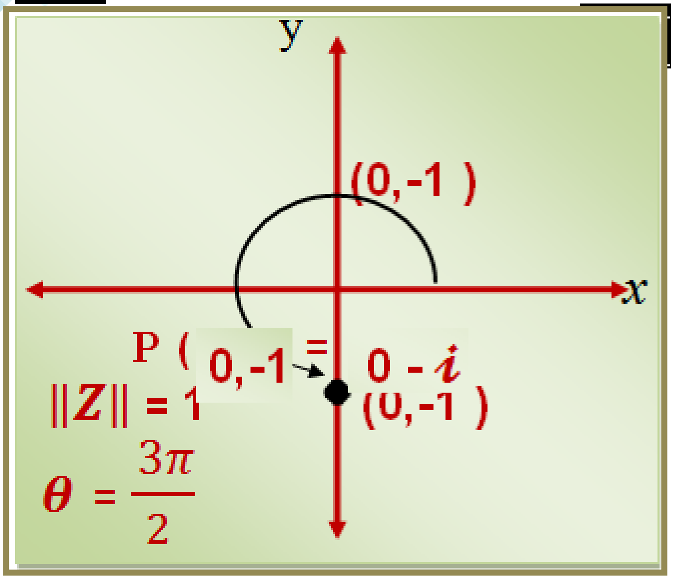
$\therefore\ Z = 1\ (\cos \pi + i \sin \pi)$

$i = 0 + i \Rightarrow P(0,1)$



$\therefore\ Z = 1(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$

④ $-i = 0 - i \Rightarrow P(0,-1)$



$\therefore\ Z = 1(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2})$

$\therefore$ يكون $-1 = (\cos \pi + i \sin \pi)$ ، $1 = (\cos 0 + i \sin 0)$

موبايل 07802543623

$$i = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} \right) \quad , \quad -i = \left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \sin\frac{3\pi}{2} \right)$$

Ex. أكتب الصيغة القطبية

① $3 = 3 \times 1 = 3 \ (\cos 0 + i \sin 0)$

② $-2 = 2 \times -1 = 2 \ (\cos \pi + i \sin \pi)$

③ $5i = 5 \times i = 5 \ \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right)$

④ $-\sqrt{7}\, i = \sqrt{7} \times -i = \sqrt{7} \left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \sin\frac{3\pi}{2}\right)$

من عجائب الرياضيات

اضرب عمرك في

13837

اضرب النتيجة في 73

ستدهش للنتيجة

موبايل 07802543623

مبرهنة ديموافر

لكل $n \in N$ ، $\theta \in R$ فإن

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

Ex احسب $\left(\cos\frac{3}{8}\pi + i\sin\frac{3}{8}\pi\right)^4$

Sol

$$\left(\cos\frac{3}{8}\pi + i\sin\frac{3}{8}\pi\right)^4 = \left(\cos 4\left(\frac{3}{8}\right)\pi + i\sin 4\left(\frac{3}{8}\right)\pi\right)$$

$$= \left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 0 + i(-1) = 0 - i = -i$$

Ex احسب $\left(\cos\frac{5}{24}\pi + i\sin\frac{5}{24}\pi\right)^4$

Sol

$$\left(\cos\frac{5}{24}\pi + i\sin\frac{5}{24}\pi\right)^4 = \left(\cos 4\left(\frac{5}{24}\right)\pi + i\sin 4\left(\frac{5}{24}\right)\pi\right)$$

$$= \left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$\boxed{\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}}$$

$$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= -\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

Ex بين لكل $n \in N$ ، $\theta \in R$ فإن

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos n\theta - i\sin n\theta)$$

Sol

$$L.H.S \quad (\cos\theta - i\sin\theta)^n$$

$$= [\cos\theta + i\sin(-\theta)]^n = [\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]^n$$

$$= [\cos\emptyset + i\sin\emptyset]^n$$

وبجعل $\emptyset = -\theta$

$$= \cos n\emptyset + i\sin n\emptyset = \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)$$

$$= \cos n\theta - i\sin n\theta$$

Ex احسب باستخدام مبرهنة ديموافر $(1 + i)^{11}$

Sol

$Z = 1 + i \Rightarrow P(Z)\ (1 ، 1)$

$\|Z\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \dfrac{x}{\|Z\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ، $\sin\theta = \dfrac{y}{\|Z\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

∴ θ تقع في الربع الأول $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

$Z = \|Z\|\ (\cos\theta + i \sin\theta) = (\sqrt{2})\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i \sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$Z^{11} = (1 + i)^{11} = (\sqrt{2})^{11}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)^{11}$$

$$= 32\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{4} + i \sin\frac{11\pi}{4}\right)$$

$$= 32\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= 32\sqrt{2}\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= 32\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 32\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\, i\right)$$

$$= -32 + 32\, i$$

$\dfrac{11\pi}{4} = 2\pi + \dfrac{3\pi}{4}$ أكثر من دورة

$\dfrac{3\pi}{4} = \pi - \dfrac{\pi}{4}$ في الربع الثاني

$= (\cos\theta + i \sin\theta)^{-1} = [\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)]$

$\cos\theta - i \sin\theta$

بصورة عامة

$$(\cos\theta + i \sin\theta)^{-n} = \cos n\theta - i \sin n\theta$$

Ex احسب باستخدام مبرهنة ديموافر $(\sqrt{3} + i)^{-9}$

Sol

$Z = \sqrt{3} + i \Rightarrow P(Z)\ (\sqrt{3} ، 1)$

$$\|Z\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\|Z\|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ، \quad \sin\theta = \frac{y}{\|Z\|} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ θ تقع في الربع الأول

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

$$Z = \|Z\| \ (\cos\theta + i \sin\theta)$$

$$Z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$Z^{-9} = (\sqrt{3} + i)^{-9} = (2)^{-9}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right)^{-9}$$

$$= \frac{1}{2^9}\left(\cos(-9)\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin(-9)\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{512}\left(\cos\frac{3\pi}{2} - i \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{512}\left(0 - i\,(-1)\right) = \frac{1}{512}(0 + i)$$

$$= \frac{1}{512} i$$

سر النجاح هو توكل على الله

مسيرتي في السادس

موبايل 07802543623

نتيجة لبرهنة ديموافر

لكل $n \in Z^{+}$ ، $\theta \in R$ فإن

$$\sqrt[n]{Z} = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\theta+2\pi K}{n} + i \sin \frac{\theta+2\pi K}{n} \right]$$

حيث $K = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots\ldots n-1$

Ex حل المعادلة $x^3 + 1 = 0$ حيث $x \in \mathbb{C}$

Sol

$$x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1$$

$$x^3 = \cos \pi + i \sin \pi \Rightarrow x = (\cos \pi + i \sin \pi)^{\frac{1}{3}}$$

$$x = \left[\cos \frac{\pi+2\pi K}{3} + i \sin \frac{\pi+2\pi K}{3} \right]$$ حيث $K = 0, 1, 2 \ldots\ldots$

when $K = 0 \Rightarrow x = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

when $K = 1 \Rightarrow x = \cos \frac{\pi+2\pi}{3} + i \sin \frac{\pi+2\pi}{3}$

$$x = \cos \frac{3\pi}{3} + i \sin \frac{3\pi}{3} \Rightarrow x = \cos \pi + i \sin \pi$$

$$x = -1 + 0\, i$$

when $K = 2 \Rightarrow x = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}$

$$x = \cos \left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow x = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}$$

$$x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$\therefore S \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \; ، \; -1 \; ، \; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right\}$$

موبايل 07802543623

Ex أوجد الصيغة القطبية للمقدار $(\sqrt{3}+i)^2$ ثم الجذور الخمسة له

Sol

$Z = (\sqrt{3}+i)^2 \Rightarrow P(Z)\ (\sqrt{3}, 1)$

$\|Z\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\theta = \frac{x}{\|Z\|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\sin\theta = \frac{y}{\|Z\|} = \frac{1}{2}$

$\therefore \theta$ تقع في الربع الأول $\theta = \frac{\pi}{6}$

$Z = \|Z\|(\cos\theta + i\sin\theta)$

$Z = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

$Z^2 = (\sqrt{3}+i)^2 = (2)^2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})^2$

$= 4(\cos(2)(\frac{\pi}{6}) + i\sin(2)(\frac{\pi}{6})) = 4(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin(\frac{\pi}{3}))$

$(Z^2)^{\frac{1}{5}} = (4)^{\frac{1}{5}}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})^{\frac{1}{5}}$

$= \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi K}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi K}{5}\right)$

$= \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\pi+6\pi K}{15} + i\sin\frac{\pi+6\pi K}{15}\right)$

حيث $K = 0, 1, 2, 3, 4$

when $K = 0 \Rightarrow Z_1 = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\pi+6\pi(0)}{15} + i\sin\frac{\pi+6\pi(0)}{15}\right)$

$= \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}\right)$

when $K = 1 \Rightarrow Z_2 = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\pi+6\pi(1)}{15} + i\sin\frac{\pi+6\pi(1)}{15}\right)$

$= \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{7\pi}{15} + i\sin\frac{7\pi}{15}\right)$

$K = 2 \Rightarrow Z_3 = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\pi+6\pi(2)}{15} + i\sin\frac{\pi+6\pi(2)}{15}\right)$

when

$= \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{13\pi}{15} + i\sin\frac{13\pi}{15}\right)$

موبايل 07802543623

when $K = 3 \Rightarrow Z_4 = \sqrt[5]{4}\,(\cos\frac{\pi+6\pi(3)}{15} + i\sin\frac{\pi+6\pi(3)}{15})$

$= \sqrt[5]{4}\,(\cos\frac{19\pi}{15} + i\sin\frac{19\pi}{15})$

when $K = 4 \Rightarrow Z_5 = \sqrt[5]{4}\,(\cos\frac{\pi+6\pi(4)}{15} + i\sin\frac{\pi+6\pi(4)}{15})$

$= \sqrt[5]{4}\,(\cos\frac{25\pi}{15} + i\sin\frac{25\pi}{15})$

$= \sqrt[5]{4}\,(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$

Ex أوجد قيم $(-64\,i)^{\frac{1}{6}}$

Sol

$Z = -64\,i \Rightarrow P(Z)\ (0\ ،\ -64)$

$\|Z\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(0)^2+(-64)^2} = \sqrt{(64)^2} = 64$

$\cos\theta = \frac{x}{\|Z\|} = \frac{0}{64} = 0$ ، $\sin\theta = \frac{y}{\|Z\|} = \frac{-64}{64} = -1$

$\theta = \frac{3\pi}{2}$

$Z = \|Z\|\ r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$Z = 64\,(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$

$Z^{\frac{1}{6}} = (-64\,i)^{\frac{1}{6}} = (64)^{\frac{1}{6}}\,(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})^{\frac{1}{6}}$

$= (2^6)^{\frac{1}{6}}\,(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi K}{6} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi K}{6})$

$= 2\,(\cos\frac{3\pi+4\pi K}{12} + i\sin\frac{3\pi+4\pi K}{12})$

حيث $K = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

when $K = 0 \Rightarrow Z_1 == 2\,(\cos\frac{3\pi+4\pi(0)}{12} + i\sin\frac{3\pi+4\pi(0)}{12})$

$= 2\,(\cos\frac{3\pi}{12} + i\sin\frac{3\pi}{12}) = 2\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

$= 2\,(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,i) = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

when $K = 1 \Rightarrow Z_2 = 2\,(\cos\frac{3\pi+4\pi(1)}{12} + i\sin\frac{3\pi+4\pi(1)}{12})$

$= 2\,(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12})$

when $K = 2 \Rightarrow Z_3 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$

when $K = 3 \Rightarrow Z_4 = 2\left(\cos\frac{15\pi}{12} + i\sin\frac{15\pi}{12}\right)$

$= 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

$= 2\left(\cos \pi + \frac{\pi}{4} + i\sin \pi + \frac{\pi}{4}\right)$

$= 2\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\, i$

when $K = 4 \Rightarrow Z_5 = 2\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$

when $K = 5 \Rightarrow Z_6 = 2\left(\cos\frac{23\pi}{12} + i\sin\frac{23\pi}{12}\right)$

Ex باستخدام مبرهنة ديموافر جد الجذور التكعيبية للعدد **$(27i)$**

Sol

$(27i)^{\frac{1}{3}}$

$Z = 27i = 27 \times i = 27\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$Z^{\frac{1}{3}} = (27i)^{\frac{1}{3}} = (27)^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

$= (3^3)^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi K}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi K}{3}\right)$

$= 3\left(\cos\frac{\pi+4\pi K}{6} + i\sin\frac{\pi+4\pi K}{6}\right)$

حيث $K = 0, 1, 2$

when $K = 0 \Rightarrow Z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

when $K = 1 \Rightarrow Z_2 = 3\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

when $K = 2 \Rightarrow Z_3 = 3\left(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}\right)$

$3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 3(0 - i) = -3i$

Ex بسط ما يأتي

❶ $$\frac{(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)^{5}}{(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)^{3}} = \frac{[(\cos\theta+i\sin\theta)^{2}]^{5}}{[(\cos\theta+i\sin\theta)^{3}]^{3}}$$

$$\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^{10}}{(\cos\theta+i\sin\theta)^{9}} = \cos\theta + i\sin\theta$$

❷ $$(\cos\theta+i\sin\theta)^{8}\ (\cos\theta-i\sin\theta)^{4}$$

$$= (\cos\theta+i\sin\theta)^{8}\left[(\cos\theta+i\sin\theta)^{-1}\right]^{4}$$

$$= (\cos\theta+i\sin\theta)^{8}\ (\cos\theta+i\sin\theta)^{-4}$$

$$= (\cos\theta+i\sin\theta)^{4} = \cos 4\theta + i\sin 4\theta$$

نجاحكم وتميزكم مفخرة لنا

مع تحياتي واعتزازي

الأستاذ

حسين عبد زيد خلف

موبايل 07802543623

الرياضيات - السادس العلمي

حسين عبد زيد خلف

موبايل 07802543623

الفصل الثاني

القطوع المخروطية

CONIC SECTION

2017 - 2016

الفصل الثاني

القطــوع المخروطية CONIC

القطع المخروطي مجموعة كل النقاط التي نسبة بُعد كل منها عن نقطة (x , y) الى بعدها عن المستقيم $a x + by + c = 0$ تساوي عدداً ثابتاً (e) تكون بشكل هندسي يسمى بالقطع المخروطي .

مفاهيم أساسية لكل قطع مخروطي يتعين بها

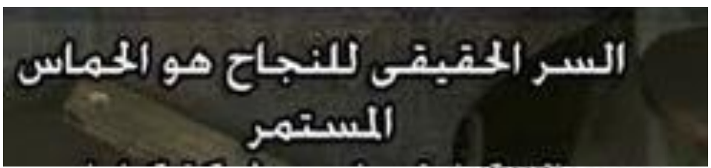
1. النقطة الثابتة (x_1 , y_1) تسمى نقطة بؤرة القطع المخروطي (**Focus**) .
2. المستقيم الثابت $(a x + by + c = 0)$ يسمى دليل القطع المخروطي **(Directrix)**
3. النسبة (e) تسمى بالاختلاف المركزي (**Eccentricity**).

$e = 1$	في القطع المكافئ	**Parabola**
$e > 1$	في القطع الناقص	**Ellipse**
$e < 1$	في القطع الزائد	**Hyperbola**

لتكن (x, y) نقطة على القطع المخروطي ، (x_1 , y_1) البؤرة
و $a x + by + c = 0$ معادلة الدليل فيكون

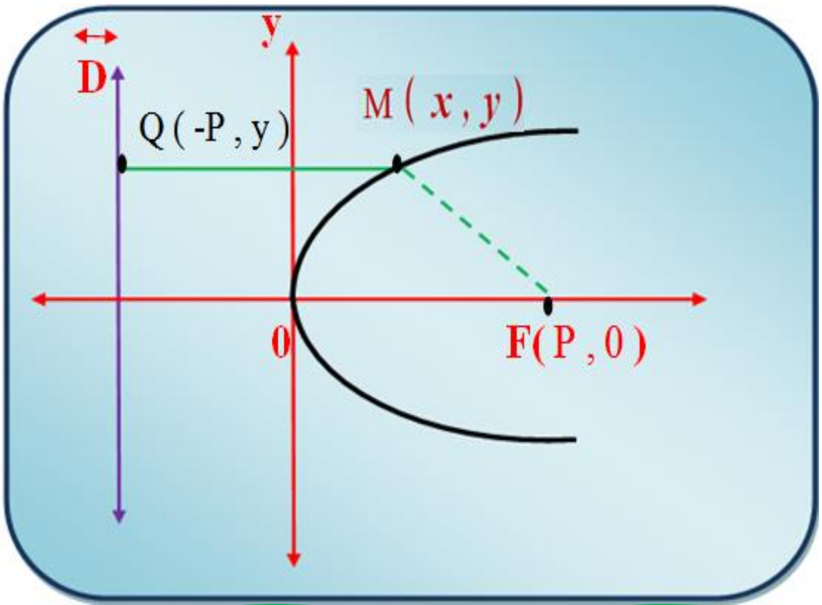
معادلة القطع المخروطي العامة

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = e^2 \frac{(a x + by + c)^2}{a^2 + b^2}$$



القطع المكافئ Parabola

هو مجموعة النقط $M(x, y)$ في المستوي والتي يكون بعد كل منها عن نقطة ثابتة $F(P, 0)$ تسمى البؤرة حيث $P > 0$ مساوياً دائماً لبعدها عن مستقيم معلوم D يسمى الدليل لا يحتوي على بؤرة



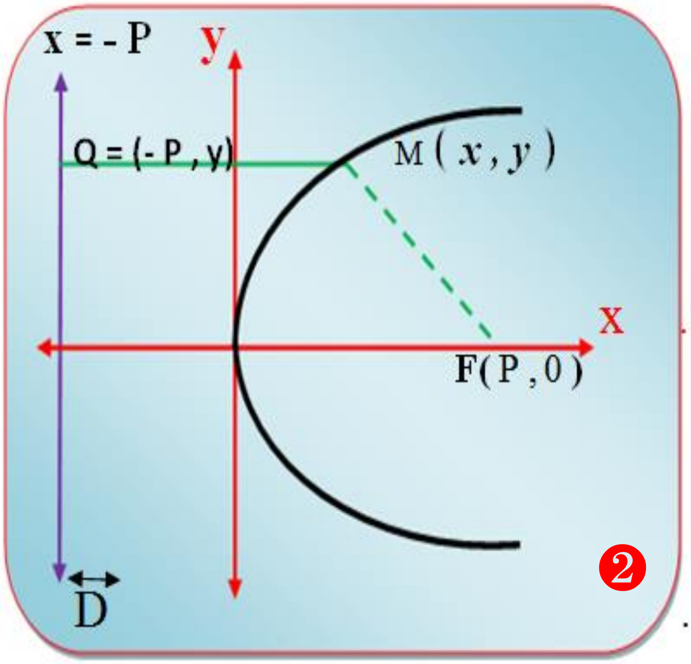
$$\frac{MF}{MQ} = e = 1$$

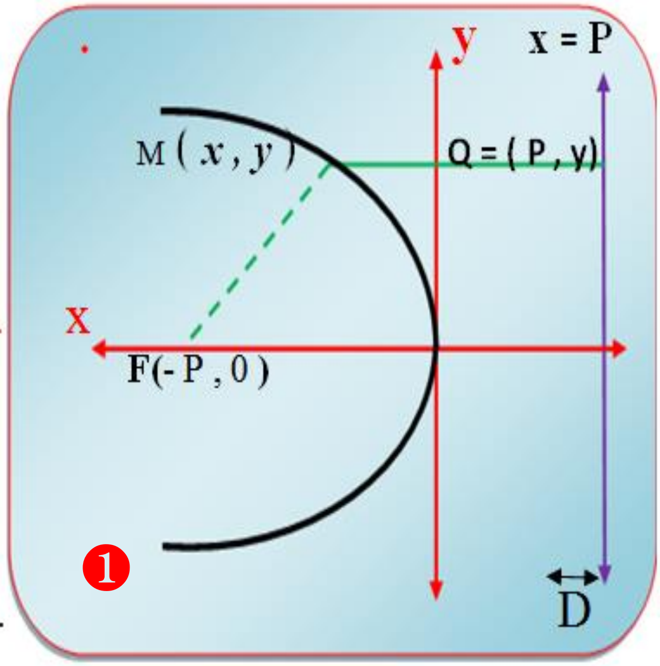
$$\therefore \; MF = MQ$$

ملاحظة

البعد بين بؤرة المكافئ ودليله $= 2P$

معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته تنتمي لمحور السينات $(x - axis)$ والرأس في نقطة الأصل





M F = MQ

بتربيع الطرفين

$$\sqrt{(x-P)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+P)^2 + (y-y)^2}$$

$$x^2 - 2Px + P^2 + y^2 = x^2 + 2Px + P^2$$

$$y^2 = 2Px + 2Px$$

$$\boxed{y^2 = 4Px \quad \forall P > 0} \qquad (❶)$$

المعادلة القياسية للقطع المكافئ

البؤرة في اتجاه الموجب

معادلة الدليل $x = -P$

البؤرة $F(P, 0)$

$$\boxed{y^2 = -4Px \quad \forall P > 0} \qquad (❷)$$

البؤرة في اتجاه السالب

معادلة الدليل $x = P$

البؤرة $F(-P, 0)$

********** ********** *********

جد البؤرة ومعادلة دليل القطع المكافئ لكل مما يأتي

(❶)

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = 4x \\ y^2 = 4Px \end{array}\right\}$$

بالمقارنة

$4P = 4 \Rightarrow P = 1$

البؤرة $F(P, 0) = (1, 0)$

معادلة الدليل $x = -P \Rightarrow x = -1$

(2) $y^2 = -8x$
$y^2 = -4Px$ } بالمقارنة

$4P = 8 \Rightarrow P = 2$

البؤرة $F(-P, 0) = (-2, 0)$

معادلة الدليل $x = P \Rightarrow x = 2$

(3) $\frac{1}{3}y^2 - 8x = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}y^2 = 8x \quad (\times 3)$

$y^2 = 24x$
$y^2 = 4Px$ } بالمقارنة

$4P = 24 \Rightarrow P = 6$

البؤرة $F(P, 0) = (6, 0)$

معادلة الدليل $x = -P \Rightarrow x = -6$

(4) $y^2 = 8cx$
$y^2 = 4Px$ } بالمقارنة

$4P = 8c \Rightarrow P = 2c$

البؤرة $F(P, 0) = (2c, 0)$

معادلة الدليل $x = -P \Rightarrow x = -2c$

(5) $\frac{2}{3}y^2 + 4x = 0 \qquad \frac{2}{3}y^2 = -4x \quad (\times \frac{3}{2})$

$y^2 = -6x$
$y^2 = -4Px$ } بالمقارنة

$4P = 6 \Rightarrow P = \frac{6}{4} \Rightarrow P = \frac{3}{2}$

البؤرة $F(-P, 0) = (-\frac{3}{2}, 0)$

معادلة الدليل $x = P \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

Exa.

جد معادلة القطع المكافئ إذا علم

SOL

(❶ بؤرته (3 ,0) والرأس نقطة الأصل .

$F(P,0) = (3,0) \qquad P = 3$

$\therefore\ y^2 = 4px \Rightarrow y^2 = 4(3)x \Rightarrow y^2 = 12x$

SOL

(❷ معادلة الدليل $2x - 6 = 0$ ورأسه نقطة الأصل

$2x - 6 = 0 \qquad 2x = 6 \qquad x = 3$

$\therefore\ y^2 = -4px \Rightarrow y^2 = -4(3)x \Rightarrow y^2 = -12x$

SOL

(❸ معادلة الدليل $2x - 5 = 0$

$2x - 5 = 0 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \Rightarrow p = \frac{5}{2}$

$F(-P,0) = (-\frac{5}{2},0)$ البؤرة

$y^2 = -4px \Rightarrow y^2 = -4(\frac{5}{2})x \Rightarrow y^2 = -10x$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖ ❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖ ❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

Exa.

جد بؤرة ومعادلة دليل القطع المكافئ $y^2 = 4x$ ثم ارسمه

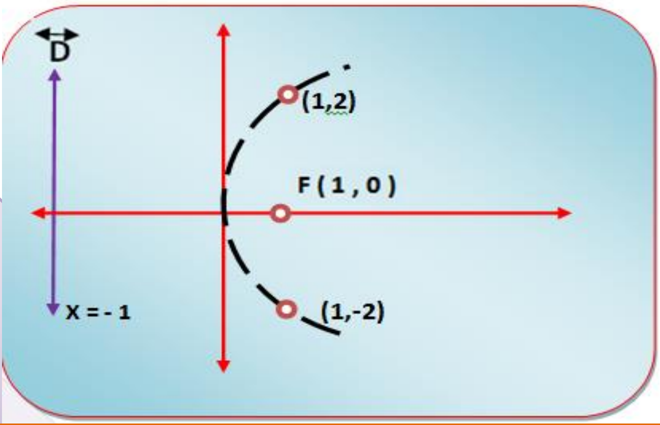
SOL

$\left.\begin{matrix} y^2 = 4x \\ y^2 = 4Px \end{matrix}\right\}$ بالمقارنة $\Rightarrow P = 1$

$4P = 4$

البؤرة $F(p,0) = (1,0)$

معادلة الدليل $x = -P \Rightarrow x = -1$



$y^2 = 4x \qquad y^2 = \mp 2\sqrt{x}$

x	0	1	2
y	0	∓ 2	$\mp 2\sqrt{2}$

Exa. باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ اذا علم ان بؤرته $(\sqrt{3}, 0)$ والرأس في نقطة الأصل

SOL

$F(\sqrt{3}, 0)$ البؤرة $\quad Q(-\sqrt{3}, y)$

$MF = MQ$ التعريف

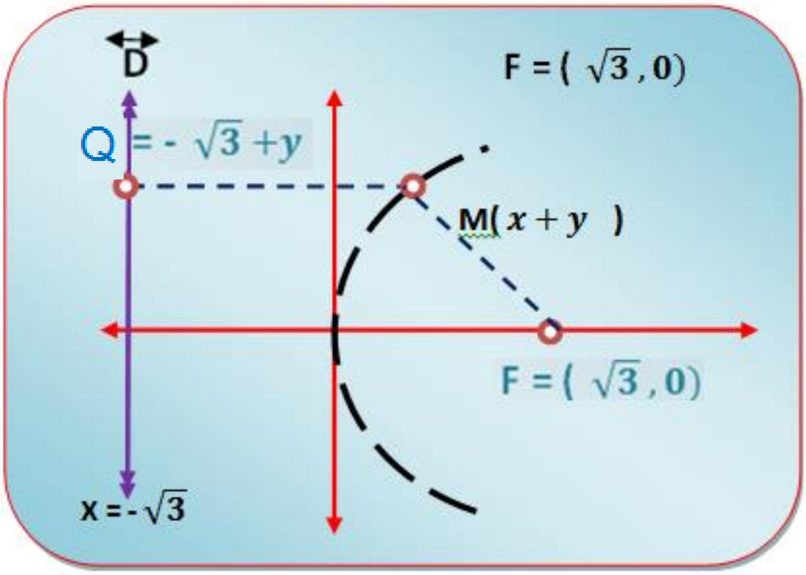
$$\sqrt{(x-\sqrt{3})^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x+\sqrt{3})^2+(y-y)^2}$$ بتربيع الطرفين

$$(x-\sqrt{3})^2+(y)^2 = (x+\sqrt{3})^2$$

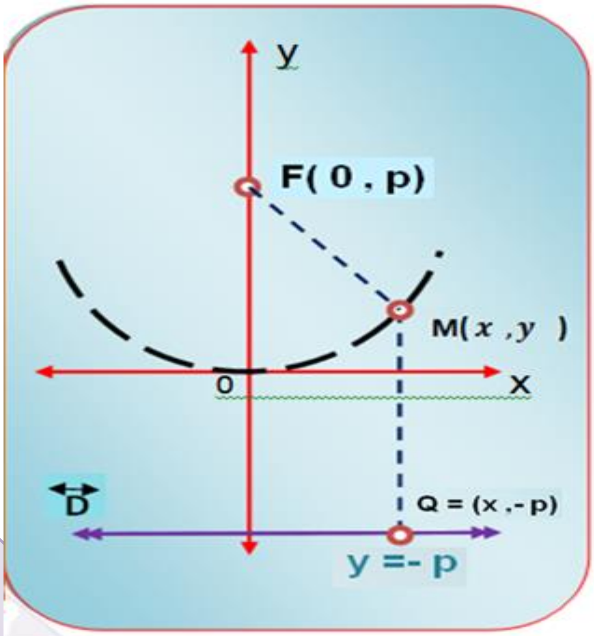
$$x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 3 + y^2 = x^2 + 2\sqrt{3}\,x + 3$$

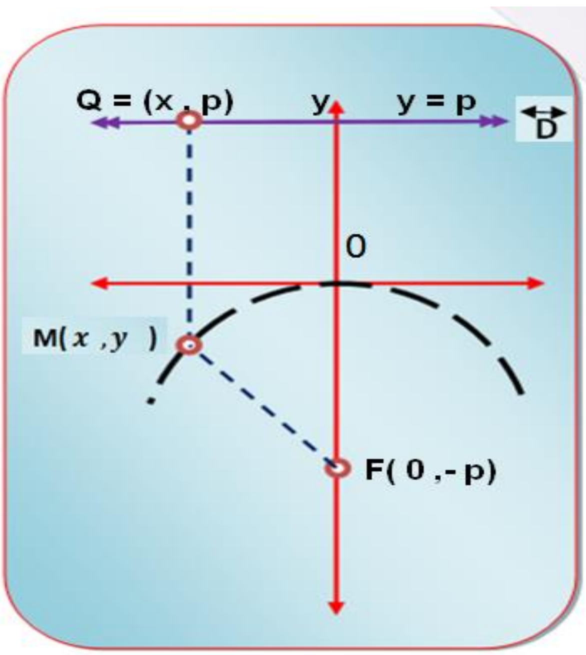
$$y^2 = 2\sqrt{3}\,x + 2\sqrt{3}\,x$$

$$y^2 = 4\sqrt{3}\,x$$



معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته تنتمي لمحور الصادات (y axis) والرأس في نقطة الأصل .





التعريف $MF = MQ$

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2+(y+p)^2}$$

بتربيع الطرفين

$$x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$

$$x^2 = 2py + 2py$$

معادلة القطع المكافئ $x^2 = 4py \quad \forall\ p > 0$

البؤرة في اتجاه الموجب للأعلى

البؤرة $F(0, p)$

معادلة الدليل $y = -p$

معادلة القطع المكافئ $x^2 = -4py \quad \forall\ p > 0$

البؤرة في اتجاه السالب للأسفل

البؤرة $F(0, -p)$

معادلة الدليل $y = p$

فتحة القطع	المحور	الدليل	البؤرة	المعادلة
نحو الاعلى	y-axis	$y = -p$	$(0, p)$	$x^2 = 4py$
نحو الاسفل	y-axis	$y = p$	$(0, -p)$	$x^2 = -4py$
نحو اليمين	x-axis	$x = -p$	$(p, 0)$	$y^2 = 4px$
نحو اليسار	x-axis	$x = p$	$(-p, 0)$	$y^2 = -4px$

مسيرتي في السادس

الفشل هو بداية النجاح لذا استغل فشلك لا تيأس

Exa.

جد البؤرة ومعادلة دليل المكافئ في كل مما يأتي.

1

$3x^2 - 24y = 0 \qquad (3x^2 = 24y) \quad \div 3$

$x^2 = 8y$
$x^2 = 4py$ بالمقارنة

$4p = 8 \Rightarrow p = 2$

البؤرة $F(0, p) = (0 . 2)$

معادلة الدليل $y = -2 \Leftarrow y = -p$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖ ❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖ ❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

2

$x^2 = -28y$
$x^2 = -4py$ بالمقارنة

$4p = 28 \Rightarrow p = 7$

البؤرة $F(0, -p) = (0, -7)$

معادلة الدليل $y = 7 \Leftarrow y = p$

Exa.

جد معادلة القطع المكافئ اذا علم ان

1 بؤرته $(0, 5)$ ورأسه في نقطة الأصل

$F(0, p) = (0, 5) \Rightarrow p = 5$

$x^2 = 4py$

$x^2 = 4(5)y$

$x^2 = 20y$ معادلة القطع المكافئ

************ ************ ***********

2 معادلة الدليل $y = 7$ ورأسه في نقطة الأصل

$y = 7$
$y = p$ $\Rightarrow p = 7$

$x^2 = -4py$

$x^2 = -4(7)y$

$x^2 = -28y$ معادلة القطع المكافئ

3 معادلة الدليل $2y+5=0$ ورأسه في نقطة الأصل.

$$2y+5=0 \Rightarrow 2y=-5$$

$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{-5}{2} \\ y=-p \end{array}\right\} \Rightarrow P=\frac{5}{2}$$

$$x^2=4py$$

$$x^2=4\left(\frac{5}{2}\right)y$$

$$x^2=10y$$ معادلة القطع المكافئ

Exa. جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين $(2,4)$, $(2,-4)$ ورأسه في نقطة الأصل.

SOL

∵ النقطتان متناظرتان حول محور السينات

∴ المعادلة القيا سية $y^2=4px$ اكتب المعادلة هنا.

تحقق معادلة القطع المكافئ $(2,4)$

$$(4)^2=4p(2)$$

$$16=8p \Rightarrow p=2$$

$$y^2=4(2)x$$

$$y^2=8x$$ معادلة القطع المكافئ

ملاحظة اذا مر القطع المكافئ بنقطتين.

1 اذا كانت اشارة الإحداثي السيني للنقطتين ثابت الإشارة (موجبة)

∴ البؤرة تقع على محور **السينات** وبالأتجاه **الموجب** $(y^2=4px)$

اما اذا كانت الأشارة (سالبة)

∴ البؤرة تقع على محور **السينات** وبالأتجاه **السالب** $(y^2=-4px)$

2 اذا كانت اشارة الأحداثي الصادي للنقطتين ثابت الأشارة (موجبة)

∴ البؤرة تقع على محور **الصادات** وبالأتجاه **الموجب** $(x^2=4py)$

اما اذا كانت الاشارة (سالبة) $(x^2=-4py)$

Exa.

مثال/ جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته هي نقطة تقاطع المستقيم $3x + 2y = 12$ مع محور السينات

SOL

نقطة تقاطع محور السينات $3x + 2y = 12$

يكون $y = 0$

$3x + 2(0) = 12 \longrightarrow 3x = 12 \longrightarrow x = 4$

نقطة التقاطع $(4, 0)$ وتمثل بؤرة القطع المكافئ

$F \; (p, 0) = (4, 0) \longrightarrow p = 4$

$y^2 = 4px$

$y^2 = 4(4)x = 16x$

$y^2 = 16x$ معادلة القطع المكافئ

Exa. جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه في نقطة الأصل وبؤرته تنتمي لمحور السينات ويمر بالنقطة تقاطع المستقيمين $2x + y = 4 \;,\; x - y = -1$

SOL

الحل/ البؤرة تنتمي لمحور السينات

$y^2 = 4px$ معادلة القطع المكافئ

$2x + y = 4 \quad \dots\dots (1)$

$x - y = -1 \quad \dots\dots (2)$

بالجمع

$3x = 3 \longrightarrow x = 1$

نعوض في (1)

$2(1) + y = 4 \longrightarrow y = 4 - 2 = 2$

$\therefore$ نقطة التقاطع $(1,2)$ وتحقق معادلة القطع المكافئ

$(2)^2 = 4p(1) \longrightarrow 4 = 4p \longrightarrow p = 1$

$y^2 = 4(1)x$

$y^2 = 4x$ معادلة القطع المكافئ

Exa.

جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه في نقطة الأصل وبؤرته على محور الصادات ويمر بالنقطة $(1\ ,-2)$

SOL

بؤرته على محور الصادات ويمر بالنقطة $(1,-2)$

$\therefore$ معادلة على محور الصادات وبالاتجاه السالب $\quad x^2 = -4py$

تحقق معادلة القطع المكافئ $(1\ ,-2)$

$$(1)^2 = -4p(-2) \longrightarrow 1 = 8p \longrightarrow p = \frac{1}{8}$$

$$x^2 = -4\left(\frac{1}{8}\right)y$$

$$x^2 = -\frac{1}{2}y$$ معادلة القطع المكافئ

Exa.

جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ويقطع المنحني $x^2+2y^2=36$ في نقطة التي احداثي السيني $=2$

SOL

$$x^2 + 2y^2 = 36$$

وعندما $x = 2$

$$(2)^2 + 2y^2 = 36 \longrightarrow 4 + 2y^2 = 36$$

$$2y^2 = 36 - 4 \longrightarrow (2y^2 = 32) \quad \div 2$$

$$y^2 = 16 \longrightarrow y = \mp 4$$

نقاط التقاطع $(2\ ,4)\ ,\ (2\ ,-4)$

النقطتان متناظرتان حول المحور السيني وبالاتجاه الموجب

$$y^2 = 4px$$ معادلة القطع المكافئ

تحقق معادلة القطع المكافئ $(2\ ,4)$

$$(4)^2 = 4p(2)$$

$$16 = 8p \longrightarrow p = 2$$

$$y^2 = 4(2)\ x$$

$$y^2 = 8x$$ معادلة القطع المكافئ

لحظة نجاح واحدة

تنسيك جميع لحظات الفشل

Exa. جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر دليل القطع المكافئ بالنقطة (3,-5)

SOL

∵ دليل القطع المكافئ يمر بنقطة

∴ يوجد احتمالين للمعادلة القياسية (لعدم تحديد موقع البؤرة)

اولا البؤرة على محور السينات

معادلة الدليل
$x = 3$
$p = 3$

المعادلة القياسية (الدليل موجب)

$y^2 = -4px$

$y^2 = -4(3)x$

$y^2 = -12x$ معادلة القطع المكافئ

ثانيا البؤرة تنتمي لمحور الصادات

$y = -5$
$y = -p$
$p = 5$

المعادلة القياسية (الدليل سالب)

$x^2 = 4py$

$x^2 = 4(5)y$

$x^2 = 20y$ معادلة القطع المكافئ

Exa. جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته تنتمي الى محور الصادات ودليله يمر بالنقطة (1,3)

SOL

/ البؤرة تنتمي لمحور الصادات

معادلة الدليل $\therefore y = 3$

$y = p \longrightarrow p = 3$

المعادلة القياسية

$x^2 = -4py$

$x^2 = -4(3)y$

$x^2 = -12y$ معادلة القطع المكافئ

Exa. جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ودليله يمر بالنقطتين (2,3), (2,-4)

SOL

الحل

المستقيم يوازي محور الصادات

معادلة الدليل $x = 2$

$x = p \longrightarrow p = 2$

المعادلة القياسية

$y^2 = -4px$

$y^2 = -4(2)x$

$y^2 = -8x$ معادلة القطع المكافئ

ملاحظة

اذا مر دليل القطع المكافئ بنقطتين

1 اذا كان الإحداثي السيني للنقطتين متساوي بالقيمة والإشارة

A إذا كانت الإشارة سالبة ⟸ معادلة القطع المكافئ $y^2 = 4px$

B اذا كانت الاشارة موجبة ›› ⟸ معادلة القطع المكافئ $y^2 = -4px$

2 اذا كان الاحداثي الصادي للنقطتين متساوي بالقيمة والاشارة

A اذا كانت الاشارة سالبة › ⟸ معادلة القطع المكافئ › $x^2 = 4py$

B اذا كانت الاشارة موجبة ›› ⟸ معادلة القطع المكافئ $x^2 = -4py$

الثوابت

EXA اذا كانت النقطة $(1,2)$ تنتمي الى القطع المكافئ $y^2 = (2A - 6)x$ فجد قيمة A

الحل/ SLO

$$y^2 = (2A - 6)x$$

تنتمي الى القطع المكافئ $(1, 2)$

$$(2)^2 = (2A - 6)(1)$$

$$4 = 2A - 6 \Longrightarrow 4 + 6 = 2A$$

$$10 = 2A \Longrightarrow A = 5$$

$$y^2 = (2(5) - 6)x$$

$y^2 = 4x$ معادلة القطع المكافئ

EXA اذا كانت النقطة $(L, 2)$ تنتمي الى القطع المكافئ $y^2 = 4x$ فما قيمة (L)

SLO

$$y^2 = 4x$$

$(L,2)$ تنتمي الى القطع المكافئ

$$(2)^2 = 4L \Longrightarrow 4 = 4L \Longrightarrow L = 1 \quad (1,2)$$

اذا كانت النقطة $(1,h)$ تنتمي الى القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ودليله $x+1=0$ فجد قيمة h

معادلة الدليل $x+1=0$

$$\left.\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-p \end{array}\right\} \quad p=1$$

البؤرة $F(p,0)=(1,0)$

معادلة القطع المكافئ $y^2=4px$

$y^2=4(1)x \longrightarrow y^2=4x$

$(1,h)$ تحقق معادلة القطع المكافئ

$h^2=4(1) \longrightarrow h^2=4 \longrightarrow h=\pm 2$

$(1,2)\ ,(1,-2)$

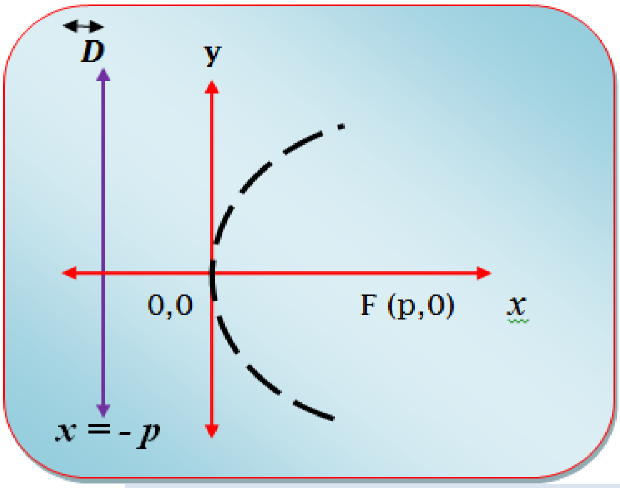
انسحاب المحاور للقطع المكافئ

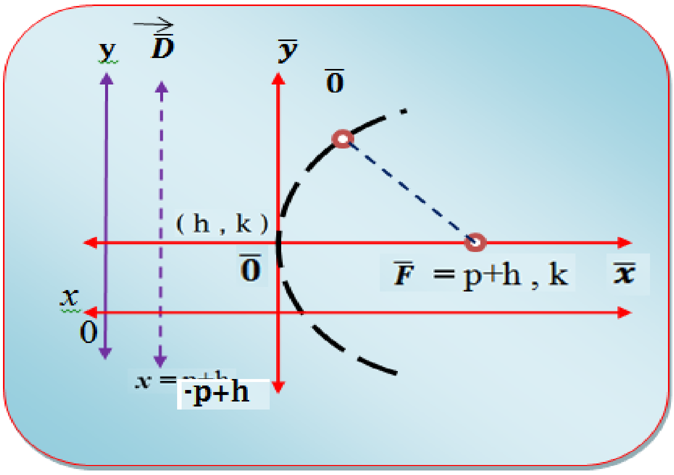
معادلة القطع المكافئ بؤرته تنتمي لمحور السينات ورأسه نقطة الأصل (0,0) هي :

1 $\quad y^2 = 4px$

المعادلة القياسية للقطع المكافئ الذي رأسه النقطة (h,k) ومحوره يوازي محور السينات هي :

2 $\quad (y-k)^2 = 4p(x-h)$





الاتجاه الموجب		
	بعد الانسحاب	قبل الانسحاب
الرأس	$\bar{0}(h,k)$	$0(0,0)$
البؤرة	$\bar{F}(p+h,k)$	$F(p,0)$
الدليل	$x=-p+h$	$x=-p$
معادلة المحور	$y=k$	$y=0$

الاتجاه ال سالب		
	$(y-k)^2=-4p(x-h)$	$y^2=-4px$
الرأس	$\bar{0}(h,k)$	$0(0,0)$
البؤرة	$\bar{F}(-p+h,k)$	$F(-p,0)$
الدليل	$x=p+h$	$x=p$
معادلة المحور	$y=k$	$y=0$

EXA

من معادلة القطع المكافئ. عين الرأس والبؤرة ومعادلة المحور ومعادلة الدليل

SLO

1

$(y+1)^2 = 4(x-2)$
$(y-k)^2 = 4p(x-h)$ } بالمقارنة

الرأس $(h, k) = (2,-1)$

$4p = 4 \longrightarrow p = 1$

البؤرة $F(p+h, k) = (1+2, -1) = (3,-1)$

معادلة المحور $y = k \longrightarrow y = -1$

معادلة الدليل $x = -p+h = -1+2 \longrightarrow x = 1$

2

$y^2 = -4(x-2)$
$(y-k)^2 = -4p(x-h)$ } بالمقارنة

الرأس $(h, k) = (2, 0)$

$4p = 4 \longrightarrow p = 1$

البؤرة $F(-p+h, k) = (-1+2, 0) = (1, 0)$

معادلة الدليل $x = p+h = 1+2 \longrightarrow x = 3$

معادلة المحور $y = k \longrightarrow y = 0$

3

$y^2 + 4y + 2 = -6$

نجعل الطرف الأول مربعا كاملا وذلك بأضافة (مربع نصف معامل y الى الطرفين والذي يساوي

$(\frac{1}{2} \times 4)^2 = (2)^2 = 4$ للطرفين

$y^2 + 4y + 4 = -6 - 2x + 4$

$(y+2)^2 = -2x - 2$

$(y+2)^2 = -2(x+1)$
$(y-k)^2 = -4p(x-h)$ } بالمقارنة

الرأس $(h, k) = (-1, -2)$

$-4p = -2 \longrightarrow p = \frac{-2}{-4} \longrightarrow p = \frac{1}{2}$

البؤرة $F(-p+h\,,\,k) = (-\frac{1}{2} - 1\,,\,-2) = (\frac{-3}{2}\,,\,-2)$

معادلة الدليل $x = p + h = \frac{1}{2} - 1 = \frac{-1}{2}$

معادلة المحور $y = k \Rightarrow y = -2$

4 $(y-2)^2 = 8(3-x)$

بالمقارنة
$$\left.\begin{array}{l}(y-2)^2 = -8(x-3)\\ (y-k)^2 = -4p(x-h)\end{array}\right\}$$

الرأس $(h\,,\,k) = (3\,,\,2)$

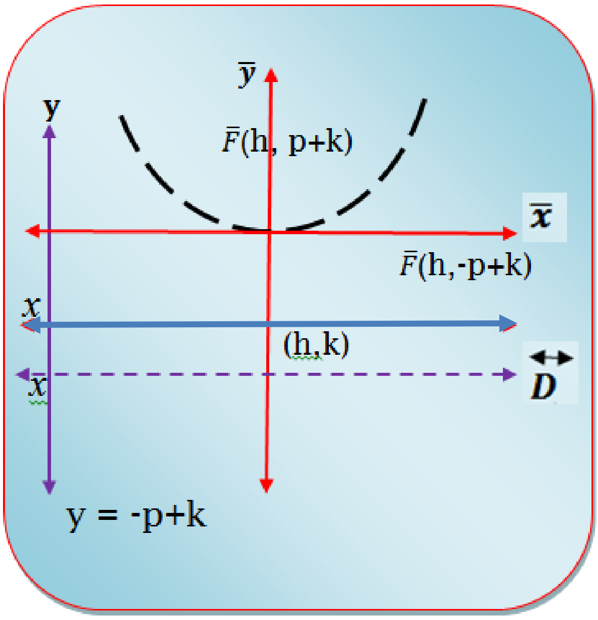
$-4p = -8 \Rightarrow p = \frac{-8}{-4} = 2$

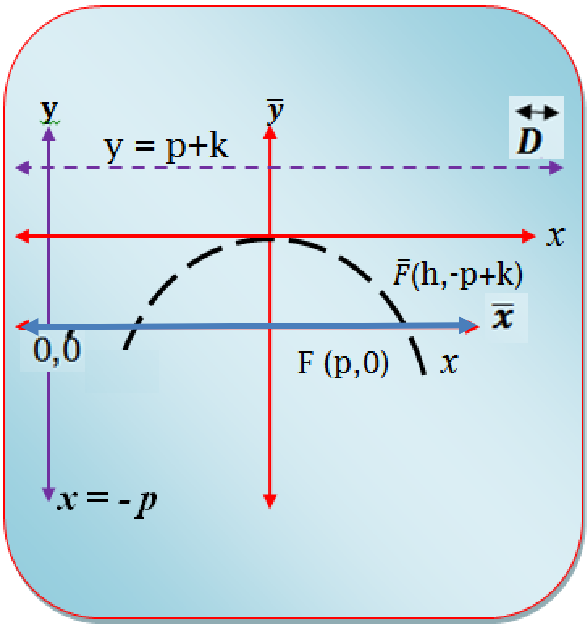
البؤرة $F(-p+h\,,\,k) = (-2+3\,,\,2) = (1,2)$

معادلة الدليل $x = p + h = 2 + 3 \Rightarrow x = 5$

معادلة المحور $y = k \Rightarrow y = 2$

المعادلة القياسية للقطع المكافئ الذي رأسه النقطة (h, k) ومحوره يوازي المحور الصادي





الاتجاه السالب (للاسفل)

	بعد الانسحاب	قبل الانسحاب
	$(x-h)^2=-4p(y-k)$	$x^2=-4py$
الرأس	$\bar{o}\ (h,k)$	$o\ (0,0)$
البؤرة	$\bar{F}(h,-p+k)$	$F(0,-p)$
الدليل	$y=\ p+k$	$y=+p$
محور	$x=h$	$x=0$

الاتجاه الموجب (للأعلى)

	بعد الانسحاب	قبل الانسحاب
	$(x-h)^2=4p(y-k)$	$x^2=4py$
الرأس	$\bar{o}\ (h,k)$	$o\ (0,0)$
البؤرة	$\bar{F}(h,p+k)$	$F(0,p)$
الدليل	$y=-p+k$	$y=-p$
محور	$x=h$	$x=0$

EXA

في كل مما يأتي جد البؤرة والرأس ومعادلتي المحور والدليل

SLO

1

بالمقارنة
$$\left.\begin{array}{l}(x-1)^2=8(y-1)\\(x-h)^2=4p(y-k)\end{array}\right\}$$

الرأس $(h,k)=(1,1)$

$4p=8 \Longrightarrow p=2$

البؤرة $F(h,p+k)=(1,2+1)=(1,3)$

معادلة الدليل $y=-p+k=-2+1 \Longrightarrow y=-1$

معادلة المحور $x=h \Longrightarrow x=1$

2

$y = x^2+4x \longrightarrow x^2+4x = y$

بأضافة (مربع نصف معامل x) للطرفين ليصبح الطرف الاول مربع كامل

$$(\frac{1}{2}\times 4)^2 = (2)^2 = 4$$

$$x^2 + 4x + 4 = y + 4$$

$$(x + 2)^2 = y + 4$$

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

الرأس $(h , k) = (-2,-4)$

$$4p = 1 \longrightarrow p = \frac{1}{4}$$

البؤرة $F(h , p + k) = (-2 , \frac{1}{4} - 4) = (-2 , \frac{-15}{4})$

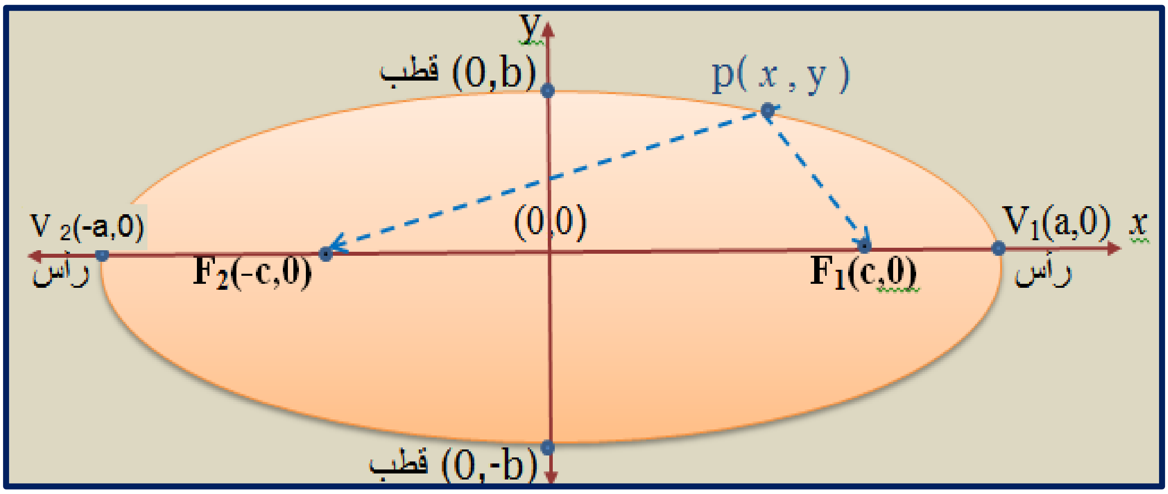
معادلة الدليل $y = -p + k = -\frac{1}{4} - 4 = \frac{-17}{4}$

معادلة المحور $x = h \longrightarrow x = -2$

القطع الناقص Ellipse

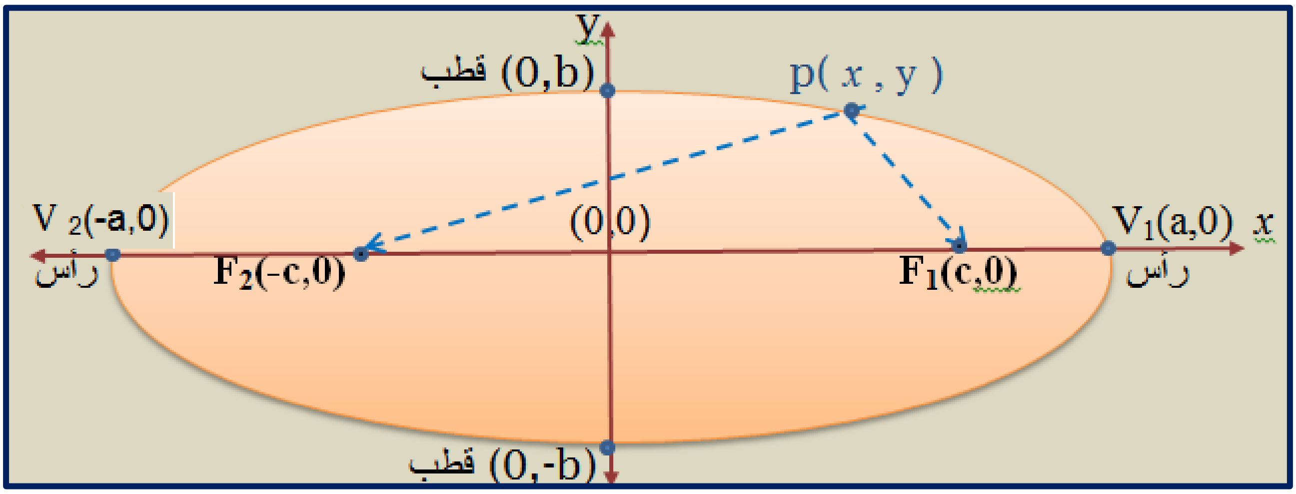
مجموعة من النقط في المستوى التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتان) عدد ثابت.

$$\boxed{PF_1+PF_2=2a}$$



المحور البؤري	المستقيم المار بالبؤرتين F_1,F_2 وطوله $=2c$
المحور الكبير	المستقيم الواصل بين الرأسين V_1,V_2 وطوله $=2a$
المحور الصغير	المستقيم الواصل بين القطبين M_1,M_2 وطوله $=2b$

معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الأصل

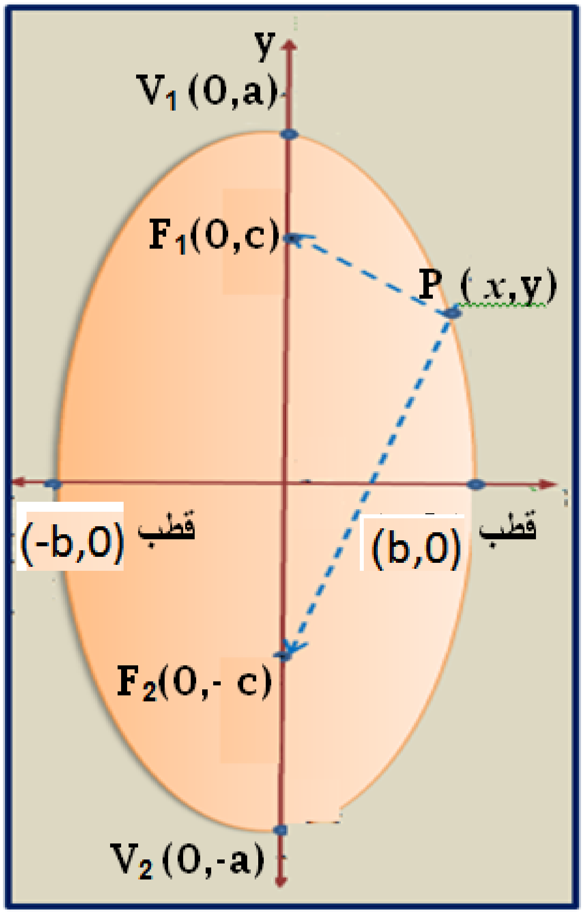


A

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
2. البؤرة $F_1(c , 0)$, $F_2(- c , 0)$
3. الرأس $V_1 (a , 0)$, $V_2 (- a , 0)$
4. قطب $(0 , b)$, $(0 , -b)$

معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه على محور الصادات ومركزه نقطة الأصل

B



1. $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$
2. البؤرة $F_1(0,c)$,$F_2(0,-c)$
3. الرأس $V_1(0,a)$, $V_2(0,-a)$
4. قطب $(b,0)$, $(-b,0)$

⑤ $c = \sqrt{a^2 - b^2} \rightarrow c^2 = a^2 - b^2$

⑥ $a > c \ , \ a > b$ اكبر القيم (a)

⑦ $2a$ = طول المحور الكبير. العدد ثابت (المسافة بين الرأسين)

⑧ $2b$ = طول المحور الصغير

⑨ $2c =$ المسافة بين البؤرتين (البعد البؤري)

⑩ $A = ab\pi$ مساحة القطع الناقص

⑪ $p = 2\pi \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ ، $\pi = \dfrac{22}{7}$ محيط القطع الناقص

⑫ $e = \dfrac{c}{a} < 1$ الاختلاف المركزي

5

في كل مما يأتي جد طول كل من المحورين واحداثي كل من البؤرتين والرأسين والاختلاف المركزي ؟

1 $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

SOL

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$a^2 = 25 \rightarrow a = 5$ المحور الكبير $2a = 2(5) = 10$ وحدة

$b^2 = 16 \rightarrow b = 4$ طول المحور الصغير $2b = 2(4) = 8$ وحدة

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{3} = 9$

$F_1(3, 0)$, $F_2(-3, 0)$

$V_1(5, 0)$, $V_2(-5, 0)$

$e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{5} < 1$

2 $\left(4x^2 + 3y^2 = \frac{4}{3}\right)$

SOL

$$\left(4x^2 + 3y^2 = \frac{4}{3}\right) \qquad \times \left(\frac{3}{4}\right)$$

$$3x^2 + \frac{9y^2}{4} = 1$$

$$\frac{x^2}{\frac{1}{3}} + \frac{y^2}{\frac{4}{9}} = 1$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$a^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$ طول المحور الكبير $2a = 2\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$

$b^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{3}}$ طول المحور الصغير $2b = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{4-3}{9}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

$F_1\left(0, \frac{1}{3}\right)$, $F_2\left(0, \frac{-1}{3}\right)$

$v_1\left(0, \frac{2}{3}\right)$, $v_2\left(0, \frac{-2}{3}\right)$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} < 1$$

3 $x^2 + 4y^2 = 4$

SOL

$(x^2 + 4y^2 = 4) \div 4$

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ بالمقارنة

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow$ طول المحور الكبير $2a = 2(2) = 4$ وحدة

$b^2 = 1 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow$ طول المحور الصغير $2b = 2(1) = 2$ وحدة

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$

$F_1(\sqrt{3}, 0)$, $F_2(-\sqrt{3}, 0)$ البؤرتان

$V_1(2, 0)$, $V_2(-2, 0)$ الرأسان

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$

4 $9x^2 + 13y^2 = 117$

SOL

$(9x^2 + 13y^2 = 117) \quad \div 117$

$\frac{9x^2}{117} + \frac{13y^2}{117} = 1$

$\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$ بالمقارنة

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$a^2 = 13 \Rightarrow a = \sqrt{13} \Rightarrow 2a = 2\sqrt{13}$ طول المحور الكبير

$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow 2b = 2(3) = 6$ طول المحور الصغير

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{13-9} = 2$

$F_1(2, 0)$, $F_2(-2, 0)$ البؤرتان

$V_1(\sqrt{13}, 0)$, $V_2(-\sqrt{13}, 0)$ الرأسان

$e = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{13}} < 1$

EXA

جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_1(3,0), F_2(-3,0)$ ورأساه النقطتان $v_1(5,0), v_2(-5,0)$ ومركزه نقطة الأصل.

SOL

بما انه البؤرتان والرأسان يقعان على محور السينات

المعادلة $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$F_1(3,0)$, $F_2(-3,0) \Rightarrow c = 3 \Rightarrow c^2 = 9$

$V_1(5,0)$, $V_2(-5,0) \Rightarrow a = 5 \Rightarrow a^2 = 25$

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 9 = 25 - b^2 \Rightarrow b^2 = 25 - 9 \Rightarrow b^2 = 16$

معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

EXA

جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه $(4,0)$ ويمر بالنقطة $(0,5)$

SOL

بما انه بؤرة القطع الناقص $(4,0) \Rightarrow c = 4$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\therefore$ $(0,5)$ احد قطبي القطع الناقص $b = 5$

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 16 = a^2 - 25 \Rightarrow a^2 = 16 + 25 \Rightarrow a^2 = 41$

$\frac{x^2}{41} + \frac{y^2}{25} = 1$

EXA

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وينطبق محوراه على المحورين الإحداثيين ويمر بالنقطتين $(0,3),(-5,0)$

SOL

$(-5,0)$ تمثل احد رأسي الناقص $a = 5$

$(0,3)$ تمثل احد قطبي الناقص $b = 3$

$\left.\right\} a > b$

معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

EXA

قطع ناقص احدى بؤرتيه (-3,0) ويقطع من محور السينات جزء طوله (12) وحدة . جد معادلته.

SOL

(-3,0) احدى بؤرتي الناقص $\Longrightarrow$ $c = 3$

$$\therefore \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

لأن البؤرة والراس على نفس المحور $2a = 12 \Longrightarrow a = 6$

$c^2 = a^2 - b^2 \Longrightarrow 9 = 36 - b^2 \Longrightarrow b^2 = 36 - 9 \Longrightarrow b^2 = 27$

معادلة القطع الناقص
$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$$

EXA

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه (5,0),(-5,0)
وطول محوره الكبير يساوي (12) وحدة (او العدد الثابت له = 12)

SOL

(-5 , 0) , (5 , 0) البؤرتان $c = 5$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$2a = 12 \Longrightarrow a = 6$

$c^2 = a^2 - b^2 \Longrightarrow 25 = 36 - b^2 \Longrightarrow b^2 = 36 - 25 \Longrightarrow b^2 = 11$

معادلة القطع الناقص
$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1$$

EXA

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور السينات والمسافة بين البؤرتين (6) وحدات، والفرق بين طولي المحورين يساوي (2) وحدة

SOL

$2c = 6 \longrightarrow c = 3$

$2a - 2b = 2 \quad \div 2 \longrightarrow a - b = 1 \longrightarrow a = 1 + b \ldots (1)$

$c^2 = a^2 - b^2 \longrightarrow 9 = a^2 - b^2 \ldots (2)$

نعوض (1) في (2)

$9 = (1+b)^2 - b^2 \longrightarrow 9 = 1 + 2b + b^2 - b^2 \longrightarrow 9 - 1 = 2b \longrightarrow 8 = 2b \longrightarrow b = 4$

نعوض في (1) $\quad a = 1 + 4 = 5$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$ معادلة القطع الناقص

EXA

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ومحوره الكبير على محور السينات وتبعد احدى بؤرتيه من الرأسين بالعددين 3,7 على الترتيب

SOL

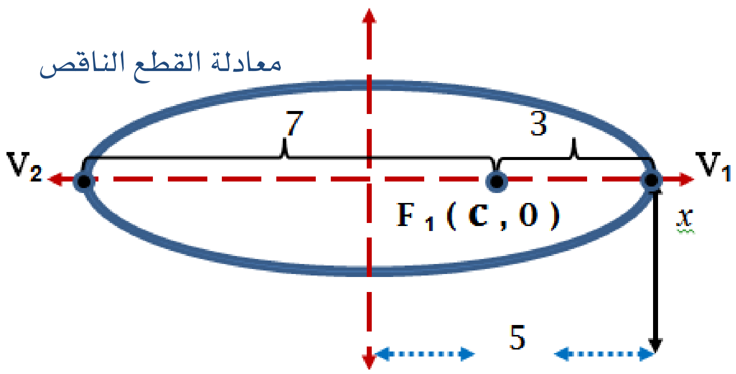
$2a = 3 + 7 = 10 \longrightarrow a = 5$

$c = 5 - 3 = 2 \longrightarrow c^2 = a^2 - b^2 \longrightarrow 4 = 25 - b^2$

$b^2 = 25 - 4 = 21$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$$ معادلة القطع الناقص



EXA

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وينطبق محوراه على المحورين الإحداثيين ويقطع من محور السينات جزءا طوله (8) وحدات ومن محور الصادات جزءا طوله (12)وحدة
ثم جد المسافة بين البؤرتين ومساحة منطقته ومحيطه

SOL

$2b = 8 \rightarrow b = 4$

$2a = 12 \rightarrow a = 6$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$$ معادلة القطع الناقص

$c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow c^2 = 36 - 16 = 20 \rightarrow c = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$2c = 2(2\sqrt{5}) = 4\sqrt{5}$ وحدة

مساحة القطع الناقص

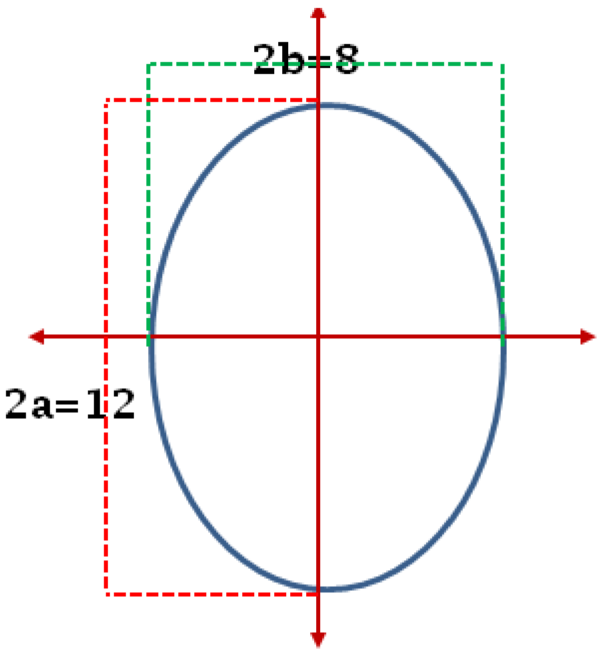
$A = ab\pi$

$A = (6)(4)\pi = 24\pi$ وحدة مربعة

محيط القطع الناقص

$$p = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

$p = 2\pi\sqrt{\frac{36+16}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{52}{2}} \rightarrow p = 2\pi\sqrt{26}$ وحدة طول



جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل في كل مما يأتي

1 الاختلاف المركزي $= \frac{1}{2}$ وطول محوره الكبير 16 وحدة طوليه.

المحور الكبير $2a = 16 \longrightarrow a = 8$

$e = \frac{c}{a} \longrightarrow \frac{1}{2} = \frac{c}{8} \longrightarrow 2c = 8 \longrightarrow c = 4$

$c^2 = a^2 - b^2 \longrightarrow 16 = 64 - b^2 \longrightarrow b^2 = 64 - 16 \longrightarrow b^2 = 48$

1 عندما البؤرتين على محور السينات

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \longrightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$$

2 عندما البؤرتين على محور الصادات

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \longrightarrow \frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{64} = 1$$

2 المسافة بين بؤرتيه تساوي 8 وحدات ونصف محوره الصغير يساوي 3 وحدات

$2c = 8 \longrightarrow c = 4$

$\frac{1}{2}(2b) = 3 \longrightarrow b = 3$

$c^2 = a^2 - b^2 \longrightarrow 16 = a^2 - 9 \longrightarrow a^2 = 16 + 9 \longrightarrow a^2 = 25$

1 عندما البؤرتين على محور السينات

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \longrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

2 عندما البؤرتين على محور الصادات

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \longrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

EXA

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2 - 12x = 0$ وطول محوره الصغير يساوي 10 وحدات

SOL

$y^2 - 12x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = 12x \\ y^2 = 4px \end{array}\right\} \quad 4p = 12 \Longrightarrow p = 3$$

بؤرة القطع المكافئ $(3,0)$ وتمثل احدى بؤرتي القطع الناقص $c = 3$

$2b = 10 \Longrightarrow b = 5$

$c^2 = a^2 - b^2 \Longrightarrow 9 = a^2 - 25 \Longrightarrow a^2 = 9 + 25 \Longrightarrow a^2 = 34$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{25} = 1$$

معادلة القطع الناقص

EXA

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2 = -8x$ ويمر بالنقطة $(0,3)$

SOL

$y^2 = -8x$

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = -8x \\ y^2 = -4px \end{array}\right\} \quad 4p = 8 \Longrightarrow p = 2$$

بؤرة القطع المكافئ $(-2,0)$ وتمثل احدى بؤرتي القطع الناقص $c = 2$

لان (البؤرتان والرئسان على نفس المحور) $b = 3 \Longleftarrow$ تمثل قطب الناقص $(0,3)$

$c^2 = a^2 - b^2 \Longrightarrow 4 = a^2 - 9 \Longrightarrow a^2 = 4 + 9 \Longrightarrow a^2 = 13$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$$

معادلة القطع الناقص

EXA

جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه $(3,0)$ ويمس دليل القطع المكافئ الذي معادلته $x^2-16y=0$

SOL

$$x^2-16y=0$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2=16y \\ x^2=4py \end{array}\right\} \quad 4p=16 \longrightarrow p=4$$

$y=-p \longrightarrow y=-4$ معادلة الدليل

$\longrightarrow b=4$ وتمثل احد قطبي القطع الناقص $(0,-4)$ نقطة التماس

$\longrightarrow c=3$ وتمثل احدى بؤرتي القطع الناقص $(3,0)$

$c^2=a^2-b^2 \longrightarrow 9=a^2-16 \longrightarrow a^2=9+16 \longrightarrow a^2=25$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$ معادلة القطع الناقص

EXA

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور السينات ويمر بالنقطة $(5,0)$ وطول محوره الأصغر يساوي البعـــد بين بؤرة المكافئ $y^2+12x=0$ ودليله.

SOL

بما انه البؤرتان على محور السينات $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\longrightarrow a=5$ تمثل احد رأسي القطع الناقص $(5,0)$

$$y^2+12x=0$$

$$\left.\begin{array}{l} y^2=-12x \\ y^2=-4px \end{array}\right\} \quad -4p=-12 \longrightarrow p=3$$

البعد بين بؤرة القطع المكافئ ودليله = طول المحور الصغير

$2b=2p \longrightarrow b=p \longrightarrow b=3$

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$ معادلة القطع الناقص

EXA

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 + 8x = 0$ علما بأن القطع الناقص يمر بالنقطة $(2\sqrt{3},\sqrt{3})$.

SOL

$$y^2 + 8x = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = -8x \\ y^2 = -4px \end{array}\right\} -4p = -8 \longrightarrow p = 2$$

$c = 2 \longrightarrow$ بؤرة القطع المكافئ $(-2,0)$ وتمثل احدى بؤرتي القطع الناقص

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

تحقق معادلة القطع الناقص $(2\sqrt{3},\sqrt{3})$

$$\frac{(2\sqrt{3})^2}{a^2} + \frac{(\sqrt{3})^2}{b^2} = 1 \longrightarrow \frac{12}{a^2} + \frac{3}{b^2} = 1 \quad \ldots(1)$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \longrightarrow 4 = a^2 - b^2 \longrightarrow a^2 = 4 + b^2 \quad \ldots(2)$$

نعوض ... (2) في ... (1)

$$\frac{12}{4+b^2} + \frac{3}{b^2} = 1 \longrightarrow \frac{12b^2+3(4+b^2)}{b^2(4+b^2)} = 1$$

$$\frac{12b^2+12+3b^2}{b^2(4+b^2)} = 1 \longrightarrow \frac{15b^2+12}{4b^2+b^2} = 1$$

$$4b^2 + b^4 = 15b^2 + 12 \longrightarrow 4b^2 + b^4 - 15b^2 - 12 = 0$$

$$b^4 - 11b^2 - 12 = 0$$

$$(b^2 - 12)(b^2 + 1) = 0$$

(نعوض في(2)

either $b^2 - 12 = 0 \longrightarrow b^2 = 12$

or $b^2 + 1 = 0 \longrightarrow b^2 = -1$ يهمل

$$a^2 = 4 + 12 = 16$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$ معادلة القطع الناقص

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات
ويمر بالنقطتين **(6,2),(3,4)**

بما انه البؤرتان على محور السينات $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

تحققان معادلة القطع الناقص **(6,2),(3,4)**

$$\frac{36}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1 \quad ....(1)$$

$$\left(\frac{9}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1 \quad ....(2)\right) \quad \times 4$$

$$\cancel{\frac{36}{a^2}}+\frac{4}{b^2}=1 \quad ....(1)$$

$$\mp\cancel{\frac{36}{a^2}}\mp\frac{64}{b^2}=\mp 4 \quad ....(2)$$

بالطرح

$$-\frac{60}{b^2}=-3 \Rightarrow -3b^2=-60 \Rightarrow b^2=20$$

نعوض في (1)

$$\frac{36}{a^2}+\frac{4}{20}=1 \Rightarrow \frac{36}{a^2}+\frac{1}{5}=1$$

$$\frac{36}{a^2}=1-\frac{1}{5} \Rightarrow \frac{36}{a^2}=\frac{5-1}{5}$$

$$\frac{36}{a^2}=\frac{4}{5} \Rightarrow 5\,(36)=4a^2 \Rightarrow a^2=45$$

معادلة القطع الناقص

$$\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$$

EXA

جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2 = 12x$
علما ان القطع الناقص يمر بنقطتي تقاطع المنحني $x^2 + y^2 = 25$ مع
محور السينات

SOL

$$y^2 = 12x$$

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = 12x \\ y^2 = 4px \end{array}\right\} \quad 4p = 12 \longrightarrow p = 3$$

$c = 3$ بؤرة القطع المكافئ $(3,0)$ وتمثل احدى بؤرتي القطع الناقص

نقطة التقاطع مع محور السينات $x^2 + y^2 = 25$

$\therefore\ y = 0 \qquad x^2 = 25 \longrightarrow x = \mp 5$

تمثلان رأسي القطع الناقص $(5,0)\ ,\ (-5,0)$ نقاط التقاطع

$(a = 5)$

$c^2 = a^2 - b^2 \longrightarrow 9 = 25 - b^2 \longrightarrow b^2 = 25 - 9 = 16$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

معادلة القطع الناقص

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

EXA

جد معادلة القطع الناقص الذي يمر بنقطتي تقاطع المستقيم $2x+y = 8$
مع المحورين.

SOL

$$2x+y = 8$$

مع محور السينات $y = 0$

$2x = 8 \longrightarrow x = 4$

نقطة التقاطع $(4,0)$

تمثل احد قطبي الناقص $\longleftarrow b = 4$

مع محور الصادات $x = 0$ $\qquad y = 8$

نقطة التقاطع $(0\ ,\ 8)$

تمثل احد راسي الناقص لأن $a > b$

$a = 8$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{64} = 1$$ معادلة القطع الناقص

جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان الى محور السينات وطول محوره الكبير يساوي ضعف طول محوره الصغير ويقطع القطع المكافئ $y^2+8x = 0$ عند النقطة التي احداثي السيني يساوي (-2)

بما انه البؤرتان على محور السينات

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$2a = 2\,(2b) \rightarrow a = 2b \rightarrow a^2 = 4b^2$

وعندما $x = -2 \rightarrow y^2 + 8x = 0 \rightarrow y^2 + 8\,(-2) = 0$

$y^2 - 16 = 0 \rightarrow y^2 = 16 \rightarrow y = \mp 4$

نقاط التقاطع $(-2,4)\ ,\ (-2,-4)$

$$\frac{x^2}{4b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$(-2,4)$ تحقق معادلة القطع الناقص

$$\frac{(-2)^2}{4b^2} + \frac{(4)^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{4}{4b^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$

$$\frac{1}{b^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{17}{b^2} = 1 \rightarrow b^2 = 17$$

$$a^2 = 4\,(17) \rightarrow a^2 = 68$$

$$\frac{x^2}{68} + \frac{y^2}{17} = 1$$ معادلة القطع الناقص

EXA

جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2 = -12x$
والنسبة بين طول محوره الكبير الى البعد بين بؤرتيه تساوي $5/3$

SOL

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = -12x \\ y^2 = -4px \end{array}\right\} -4p = -12 \longrightarrow p = 3$$

بؤرة القطع المكافئ $(-3,0)$

وتمثل احدى بؤرتي القطع الناقص $\longrightarrow$ $c = 3$

$$\frac{2a}{2c} = \frac{5}{3} \longrightarrow \frac{a}{3} = \frac{5}{3} \longrightarrow 3a = 15 \longrightarrow a = 5$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \longrightarrow 9 = 25 - b^2 \longrightarrow b^2 = 25 - 9 = 16$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$ معادلة القطع الناقص

EXA

جد معادلة القطع الناقص الذي احدى رأسيه هو بؤرة القطع المكافئ $x^2 = 28y$
ومساحته منطقة القطع الناقص (88) وحدة مربعة

SOL

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = 28y \\ x^2 = 4py \end{array}\right\} 4p = 28 \longrightarrow p = 7$$

بؤرة القطع المكافئ $(0,7)$

وتمثل احد راسي القطع الناقص $\longrightarrow$ $a = 7$

$A = ab\pi$

$$88 = (7)\, b \left(\frac{22}{7}\right) \longrightarrow 88 = 22b \longrightarrow b = 4$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{49} = 1$$ معادلة القطع الناقص

EXA

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ومساحة منطقته **(20π)** وحدة مربعة واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2 = 12x$

SOL

$$\left.\begin{matrix} x^2 = 12y \\ x^2 = 4py \end{matrix}\right\} \quad 4p = 12 \longrightarrow p = 3$$

$(3,0)$ **بؤرة القطع المكافئ**

وتمثل احدى بؤرتي القطع الناقص $\longleftarrow$ $c = 3$

$$A = a\,b\,\pi \longrightarrow 20\,\pi = a\,b\pi$$

$$a\,b = 20 \longrightarrow b = \frac{20}{a} \quad \ldots.(1)$$

$$\color{red}{\mathbf{c^2 = a^2 - b^2}} \longrightarrow 9 = a^2 - \left(\frac{20}{a}\right)^2$$

$$\left[\, 9 = a^2 - \frac{400}{a^2} \,\right] (a^2) \longrightarrow 9a^2 = a^4 - 400$$

$$a^4 - 9a^2 - 400 = 0$$

$$(a^2 - 25)(a^2 + 16) = 0$$

either $a^2 - 25 = 0 \longrightarrow a^2 = 25 \longrightarrow a = 5$

نعوض في ... (1)

or $a^2 + 16 = 0 \longrightarrow a^2 = -16$ يهمل

$$b = \frac{20}{5} \longrightarrow b = 4$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

معادلة القطع الناقص

EXA

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ويمر بالنقطة **(3,2)** ونهايتي محوره الكبير هما النقاط تقاطع المنحني $\mathbf{y^2 - 2x^2 = 16}$ مع محور الصادات

SOL

$y^2 - 2x^2 = 16$

نقطة التقاطع مع محور الصادات $x = 0$

$y^2 = 16 \Rightarrow y = \mp 4$

وتمثل رأسي القطع الناقص $(0\ ,\ 4),(0\ ,\ -4)$ **نقاط التقاطع**

$(a = 4)$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{16} = 1$$

$(3,2)$ تحقق معادلة القطع الناقص

$$\frac{(3)^2}{b^2} + \frac{(2)^2}{16} = 1 \Rightarrow \frac{9}{b^2} + \frac{4}{16} = 1$$

$$\frac{9}{b^2} + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow \frac{9}{b^2} = 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{9}{b^2} = \frac{4-1}{4}$$

$$\frac{9}{b^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow 3b^2 = 36 \Rightarrow b^2 = 12$$

معادلة القطع الناقص $$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$$

ثوابت

EXA

لتكن $Kx^2+4Y^2 = 36$ معادلة القطع الناقص مركزه نقطة الأصل واحدى بؤرتيه $(\sqrt{3},0)$ جد قيمة K

SLO

$K x^2 + 4Y^2 = 36 \qquad \div 36$

$$\frac{kx^2}{36}+\frac{4y^2}{36}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{36}{k}}+\frac{y^2}{9}=1$$

بؤرة القطع الناقص $(\sqrt{3},0) \Rightarrow c = \sqrt{3}$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow a^2 = \frac{36}{k} , b^2 = 9$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 3 = a^2 - 9 \Rightarrow a^2 = 3+9 = 12$$

$$a^2 = \frac{36}{k} \Rightarrow 12 = \frac{36}{k} \Rightarrow k = \frac{36}{12} \Rightarrow K = 3$$

EXA

قطع ناقص يمر بالنقطتين $(2k,3),(2,-3)$ واحدى بؤرتيه $(2,0)$ جد قيمة K

SLO

بؤرة القطع الناقص $(2,0) \Rightarrow c = 2$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$(2,-3)$ تحقق معادلة القطع الناقص

$$\frac{(2)^2}{a^2}+\frac{(-3)^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{4}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1 \quad ....(1)$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 4 = a^2 - b^2 \Rightarrow a^2 = 4+b^2 \quad ....(2)$$

نعوضها في ... (1)

$$\frac{4}{4+b^2}+\frac{9}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{4b^2+9(4+b^2)}{b^2(4+b^2)}=1$$

$$\frac{4b^2+36+9b^2)}{4b^2+b^4}=1 \Rightarrow \frac{13b^2+36}{4b^2+b^4}=1$$

$$4b^2 + b^4 = 13b^2 + 36$$

$$4b^2 + b^4 - 13b^2 - 36 = 0$$

$b^4 - 9b^2 - 36 = 0$

$(b^2 - 12)\ (b^2 + 3) = 0$

either $b^2 - 12 = 0 \Rightarrow b^2 = 12$

نعوض في ...(2)

or $b^2 + 3 = 0 \Rightarrow b^2 = -3$ يهمل

$a^2 = 4 + 12 \Rightarrow a^2 = 16$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$ معادلة القطع الناقص

(2K,3) تحقق معادلة القطع الناقص

$$\frac{(2k)^2}{16} + \frac{(3)^2}{12} = 1 \Rightarrow \frac{4k^2}{16} + \frac{9}{12} = 1$$

$$\left(\frac{k^2}{4} + \frac{3}{4} = 1\right) \times (4)$$

$k^2 + 3 = 4 \Rightarrow k^2 = 4 - 3 \Rightarrow k^2 = 1 \Rightarrow K = \mp 1$

EXA

لتكن $3x^2 + ky^2 = 12$ معادلة القطع الناقص محوره الكبير على محور الصادات.
فأذا كان العدد الثابت له يساوي $2\sqrt{12}$ جد قيمة K

SLO

$2a = 2\sqrt{12} \Rightarrow a = \sqrt{12}$

$3x^2 + k\,y^2 = 12 \qquad \div 12 \Rightarrow \frac{3x^2}{12} + \frac{ky^2}{12} = 1$

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{\frac{12}{k}} = 1$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$a^2 = \frac{12}{k} \Rightarrow 12 = \frac{12}{k} \Rightarrow k = \frac{12}{12} \Rightarrow K = 1$

أدرس من اجل هؤلاء يريدون فشلك

مسيرتي في السادس

EXA

لتكن $Lx^2 + 4y^2 = 6L$ معادلة القطع الناقص مركزه نقطة الأصل
واحدى بؤرتيه هي $(0,\sqrt{3})$ فجد قيمة L

SLO

$(0,\sqrt{3})$ بؤرة القطع الناقص $\Longleftarrow$ $c = \sqrt{3}$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$(\ Lx^2 + 4y^2 = 6L\ ) \div 6L$$

$$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{\frac{3L}{2}} = 1 \Longrightarrow a^2 = \frac{3L}{2} \quad ,, \quad b^2 = 6$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Longrightarrow 3 = \frac{3L}{2} - 6 \Longrightarrow 3 + 6 = \frac{3L}{2}$$

$$\left(\frac{3L}{2} = 9\right) \times 2 \Longrightarrow 3L = 18 \Longrightarrow L = 6$$

EXA

لتكن $kx^2+y^2 = 36$ معادلة القطع الناقص مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه تنتمي
الى محور الصادات فأذا كان مجموع طولي محوريه يساوي 16 فجد قيمة K

SLO

$$(\ k x^2 + y^2 = 36\ ) \div 36$$

$$\frac{x^2}{\frac{36}{k}} + \frac{y^2}{36} = 1$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Longrightarrow a^2 = 36 \quad ,, \quad b^2 = \frac{36}{k}$$

$$(\ 2a + 2b = 16\ ) \div 2 \Longrightarrow a + b = 8$$

$$6 + b = 8 \Longrightarrow b = 8 - 6 = 2$$

$$4 = \frac{36}{k} \Longrightarrow k = \frac{36}{4} \Longrightarrow K = 9$$

EXA

لتكن $kx^2+hy^2=225$ معادلة القطع الناقص فأذا كانت النسبة بين طولي محوريه تساوي $\frac{5}{3}$ واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $x^2=16y$ فجد قيمة k,h.

SLO

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = 16y \\ x^2 = 4py \end{array}\right\} \quad 4p = 16 \Rightarrow p = 4$$

بؤرة القطع المكافئ $(0,4)$

$c = 4 \Leftarrow$ وتمثل احدى بؤرتي القطع الناقص

$$\frac{2a}{2b} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{5}{3}$$

$$3a = 5b \Rightarrow a = \frac{5b}{3}$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 16 = \left(\frac{5b}{3}\right)^2 - b^2$$

$$\left(16 = \frac{25b^2}{9} - b^2\right) \quad \times (9)$$

$$144 = 25b^2 - 9b^2 \Rightarrow (144 = 16b^2) \quad \div 16$$

$$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

$$a = \frac{5b}{3} = \frac{5(3)}{3} \Rightarrow a = 5$$

$$kx^2 + hy^2 = 225 \quad \div 225$$

$$\frac{x^2}{\frac{225}{k}} + \frac{y^2}{\frac{225}{h}} = 1$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$a^2 = \frac{225}{h} \Rightarrow 25 = \frac{225}{h} \Rightarrow h = \frac{225}{25} \Rightarrow h = 9$$

$$b^2 = \frac{225}{k} \Rightarrow 9 = \frac{225}{k} \Rightarrow k = \frac{225}{9} \Rightarrow K = 25$$

EXA

لتكن $ky^2+3x^2=h$ قطع ناقص يمر بنقطة تقاطع المستقيم $2x+y=\sqrt{3}$ مع محور الصادات علما ان مساحة القطع الناقص $(2\sqrt{3}\pi)$ وحدة مربعة فجد قيمة k , h

SLO

مع محور الصادات $x=0$ ، $\sqrt{3}=2x+y$

$2(0)+y=\sqrt{3} \Rightarrow y=\sqrt{3}$

وتمثل نقطة يمر بها القطع الناقص $(0,\sqrt{3})$ نقطة التقاطع

نفرض $(0,\sqrt{3})$ تمثل رأس القطع الناقص

$a=\sqrt{3}$

$ab=2\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3}\,b=2\sqrt{3}$

$b=2$

وهذا لا يمكن لان في القطع الناقص $a>b$

$\therefore$ $(0,\sqrt{3})$ تمثل القطب الناقص $b=\sqrt{3}$

$A=2\sqrt{3}\pi$

$ab\pi=2\sqrt{3}\pi \Rightarrow ab=2\sqrt{3}$

$(0,\sqrt{3})$ تمثل احد قطبي الناقص $\Rightarrow b=\sqrt{3}$

$ab=2\sqrt{3} \Rightarrow a(\sqrt{3})=2\sqrt{3}$

$a=2$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$$

$(ky^2+3x^2=h)\ \div h$

$$\frac{x^2}{\frac{h}{3}}+\frac{y^2}{\frac{h}{k}}=1 \Rightarrow a^2=\frac{h}{3} \Rightarrow 4=\frac{h}{3} \Rightarrow h=12$$

$$b^2=\frac{h}{k} \Rightarrow 3=\frac{12}{k} \Rightarrow k=\frac{12}{3} \Rightarrow K=4$$

EXA

باستخدام التعريف جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_1(2,0),F_2(2,0)$ والعدد الثابت يساوي 6 .

SLO

$\forall\, p\,(x\,,\,y\,)$ تنتمي للقطع الناقص

$$pF_1+pF_2 = 2a$$

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2} + \sqrt{(x+2)^2+(y-0)^2} = 6$$

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2} = 6 - \sqrt{(x+2)^2+y^2}$$

بتربيع الطرفين

$$(x-2)^2 + y^2 = 36 - 12\sqrt{(x+2)^2+y^2} + (x+2)^2 + y^2$$

$$x^2 - 4x + 4 = 36 - 12\sqrt{(x+2)^2+y^2} + x^2 + 4x + 4$$

$$-4x = 36 - 12\sqrt{(x+2)^2+y^2} + 4x$$

$$12\sqrt{(x+2)^2+y^2} = 36+8x \qquad \div 4$$

$$3\sqrt{(x+2)^2+y^2} = 9 + 2x$$

بتربيع الطرفين

$$9\,[\,(x+2)^2 + y^2\,] = 81 + 36x + 4x$$

$$9\,[x^2 + 4x + 4 + y^2\,] = 81 + 36x + 4x^2$$

$$9x^2 + 36x + 36 + 9y^2 = 81 + 36x + 4x^2$$

$$9x^2+9y^2-4x^2 = 81 - 36$$

$$(\,5x^2 + 9y^2 = 45\,) \qquad \div 45$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$

معادلة القطع الناقص

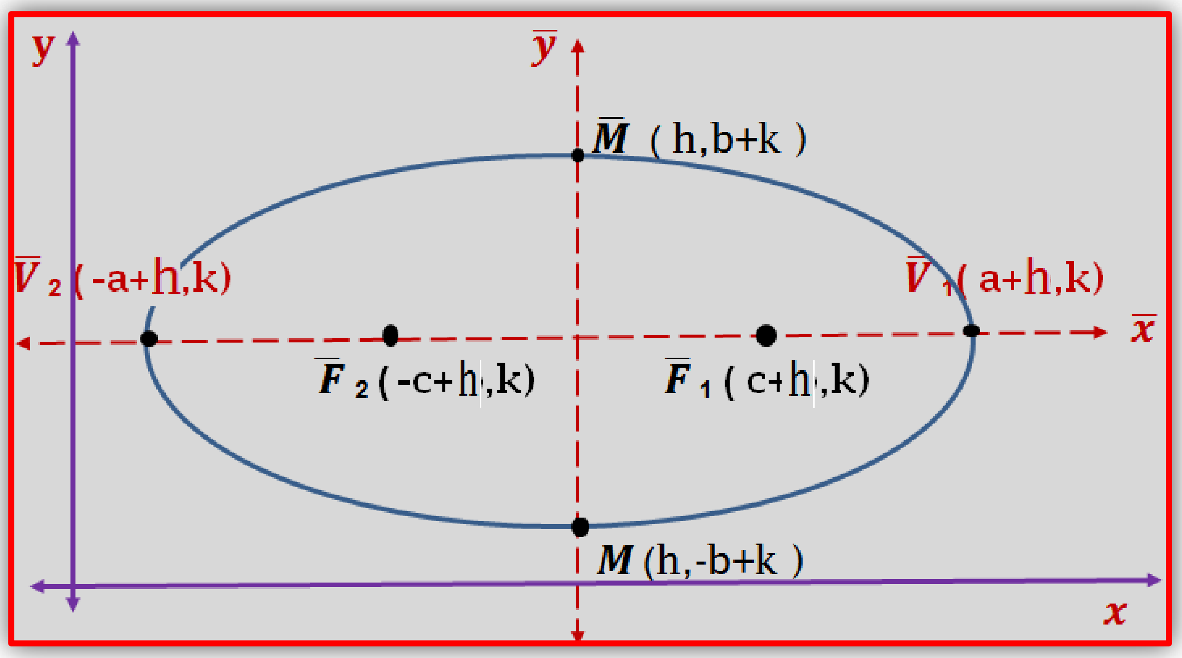
طريقة رسم القطع الناقص

لتكن $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ معادلة القطع الناقص بؤرتاه تنتميان الى محور السينات

1. تعيين النقطتين $V_2\ (-a,0)$, $V_1\ (a,0)$ (الرأسين)
2. تعيين النقطتين $M_2\ (0,-b)$, $M_1\ (0,b)$ (القطبين)
3. نصل بين النقاط الأربعة $V_1\ M_1\ V_2\ M_2$ على الترتيب بمنحني متصل
4. تعيين البؤرتين $F_2(-C,0)$, $F_1(C,0)$

انسحاب المحاور للقطع الناقص

المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي محوره الأكبر يوازي المحور السيني ومركزه النقطة (h,k)



بعد الانسحاب

المعادلة $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

البؤرتان $\bar{F}_1(c+h,k),\bar{F}_2(-c+h,k)$

الرأسان $\bar{V}_1(a+h,k),\bar{V}_2(-a+h,k)$

القطبين $\bar{M}_1(h,b+k),\bar{M}\ (h,-b+k)$

طول المحور الكبير $= 2a$

معادلته $y = k$

طول المحور الصغير $= 2b$

معادلته $x = h$

قبل الانسحاب

المعادلة $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

البؤرتان $F_1(c,0),F_2(-c,0)$

الرأسان $V_1(a,0),V_2(-a,0)$

القطبين $M_1(0,\ b),M\ (0,-b)$

طول المحور الكبير $= 2a$

معادلته $y = 0$

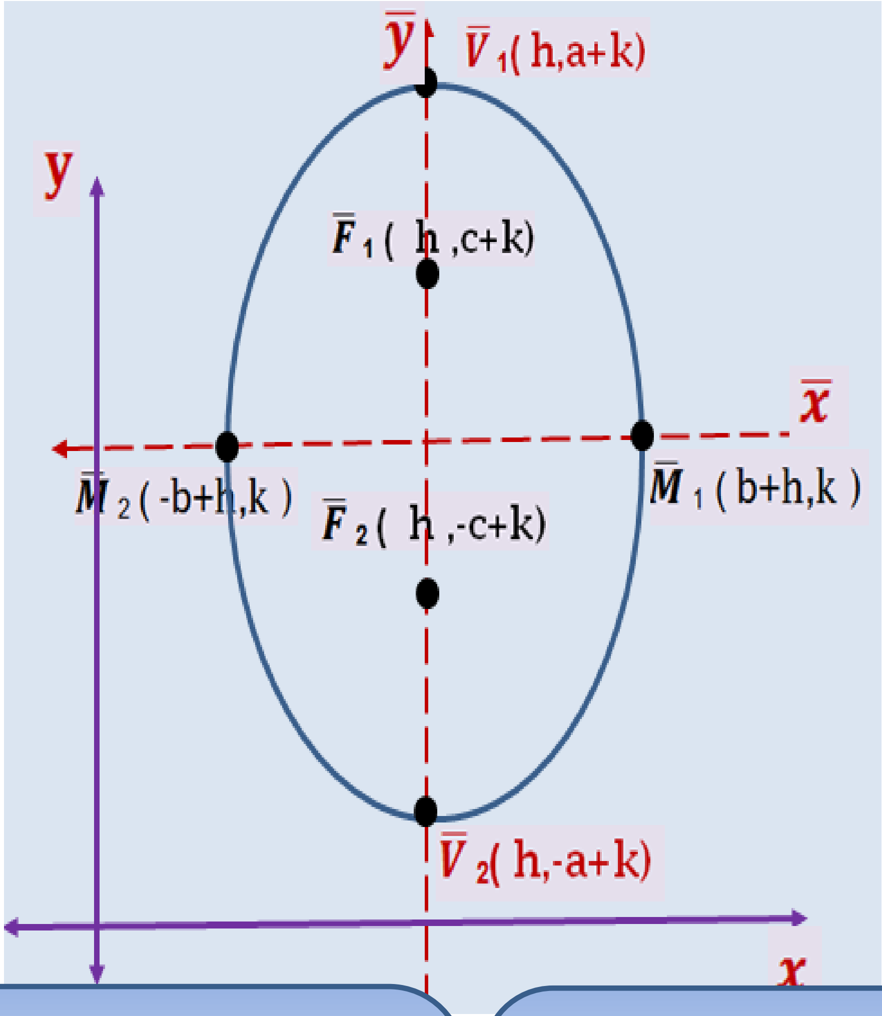
طول المحور الصغير $= 2b$

معادلته $x = 0$

مسيرتي في السادس

الفشل هو بداية النجاح لذا استغل فشلك لا تيأس

المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي محوره الأكبر يوازي المحور الصادي ومركزه النقطة (h,k)



بعد الانسحاب

المعادلة $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

البؤرتان $\bar{F}_1(h,c+k)$,$\bar{F}_2(h,-c+k)$

الرأسان $\bar{V}_1(h,a+k)$,$\bar{V}_2(h,-a+k)$

القطبين $\bar{M}_1(b+h,k)$,$\bar{M}(-b+h,k)$

طول المحور الكبير $= 2a$

معادلته $x = h$

طول المحور الصغير $= 2b$

معادلته $y = k$

قبل الانسحاب

المعادلة $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

البؤرتان $F_1(0,c),F_2(o,-c)$

الرأسان $V_1(o.a),V_2(0,-a)$

القطبين $M_1(b,0),M\ (-b,0)$

طول المحور الكبير $= 2a$

معادلته $x = 0$

طول المحور الصغير $= 2b$

معادلته $y = 0$

EXA

في كل مما يأتي جد البؤرتين والرأسين والقطبين وطول معادلة كل من المحورين للقطع الناقص ثم جد قيمة e

SLO

1 $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{25}=1$

$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(x-k)^2}{a^2}=1$

الرأس $(h,k) = (2,1)$

$a^2 = 25 \longrightarrow a = 5$,, $b^2 = 9 \longrightarrow b = 3$

طول المحور الكبير $= 2a = 2(5) = 10$

معادلته $x = h \longrightarrow x = 2$

طول المحور الصغير $= 2b = 2(3) = 6$

معادلته $y = k \longrightarrow y = 1$

$c^2 = a^2 - b^2 \longrightarrow c^2 = 25 - 9 = 16 \longrightarrow c = 4$

البؤرتان
$$\left.\begin{array}{l}\bar{F}_1\ (h,c+k) = (2,4+1) = (2,5)\\ \bar{F}_2\ (h,-c+k) = (2,-4+1) = (2,-3)\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\bar{V}_1\ (h, a+k) = (2, 5+1) = (2,6)\\ \bar{V}_2\ (h,-a+k) = (2,-5+1) = (2,-4)\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\bar{M}_1\ (b+h,k) = (3+2,1) = (5,1)\\ \bar{M}_2\ (-b+h,k) = (-3+2,1) = (-1,1)\end{array}\right\}$$

الاختلاف المركزي $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} < 1$

2

$$9x^2 + 16y^2 - 72x - 96y + 144 = 0$$
$$9x^2 - 72x + 16y^2 - 96y = -144$$
$$9(x^2 - 8) + 16(y^2 - 6y) = -144$$
$$9(x^2 - 8x + 16) + 16(y^2 - 6y + 9) = -144 + 144 + 144$$
$$9(x-4)^2 + 16(y-3)^2 = 144 \qquad \div 144$$
$$\frac{(x-4)^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$$
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

الرأس $(h,k) = (4,3)$

$a^2 = 16 \longrightarrow a = 4$,, $b^2 = 9 \longrightarrow b = 3$

طول محوره الكبير $2a = 2(4) = 8$

معادلته $y = k \longrightarrow y = 3$

طول محوره الصغير $2b = 2(3) = 6$

معادلته $x = h \longrightarrow x = 4$

$c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 9 = 7 \longrightarrow c = \sqrt{7}$

البؤرتان

$$\left.\begin{array}{l} \bar{F}_1 \ (h+c, k) = =(\sqrt{7}+4, 3) \\ \bar{F}_2 \ (h-c, k) = (-\sqrt{7}+4, 3) \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{V}_1 \ (h+a, k) = (4+4, 3) = (8, 3) \\ \bar{V}_2 \ (h-a, k) = (-4+4, 3) = (0, 3) \end{array}\right\}$$

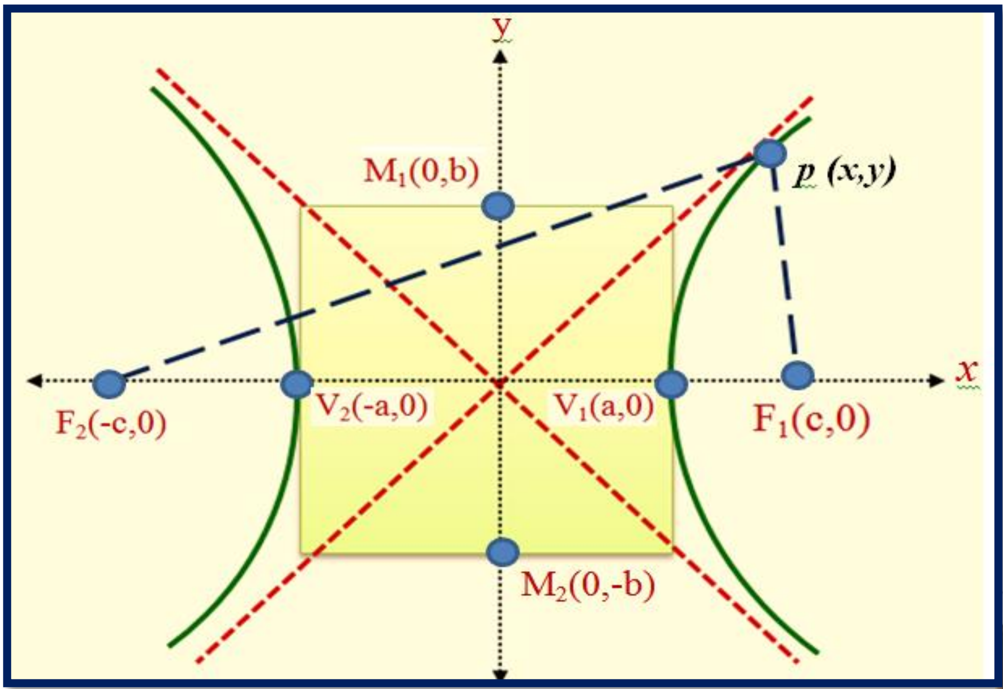
$$\left.\begin{array}{l} \bar{M}_1 \ (h, b+k) = (4, 3+3) = (4, 6) \\ \bar{M}_2 \ (h, -b+k) = (4, -3+3) = (4, 0) \end{array}\right\}$$

الاختلاف المركزي $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{3} < 1$

القطع الزائد Hyper bola

هو مجموعة النقاط في المستوي التي تكون القيمة المطلقة لفرق بعدي اي منها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتان) يساوي عددا ثابتا .

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$



$$r_1 = pF_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

1 طولي نصفي القطرين البؤرتين المرسومين من p هما البعدان pF_1 , pF_2
على الترتيب $r_1 = pF_1$, $r_2 = pF_2$

2 العدد الثابت = $2a$ يمثل طول المحور الحقيقي والذي تقع عليه البؤرتين والراسين

3 البعد البؤري = $2c$ يمثل المسافة بين البؤرتين F_1 , F_2

4 طول المحور المرافق = $2b$ يمثل المحور العمودي على المحور الحقيقي والمار بمركز القطع

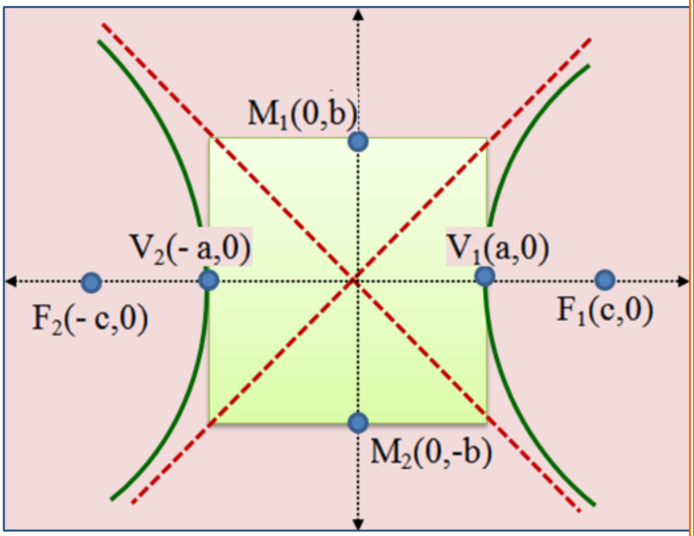
6 حيث c أكبر الفيم $c > a$,, $c > b$

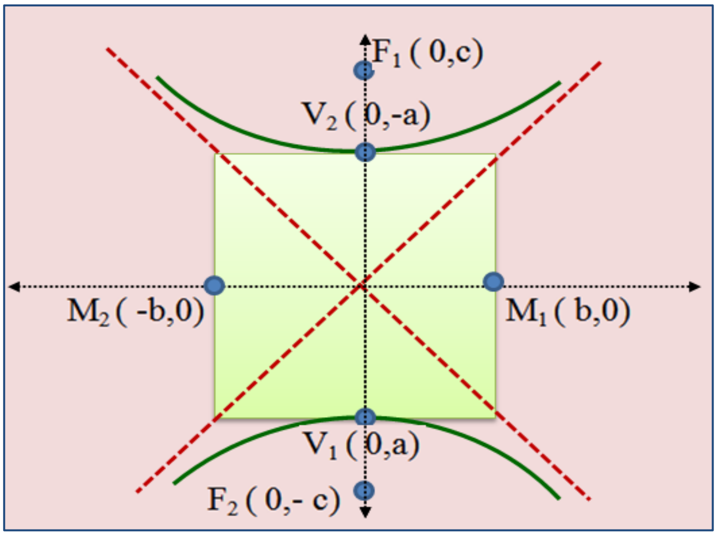
5 $c^2 = a^2 + b^2$

7 $e = \frac{c}{a} > 1$

معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الأصل

معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه على محور الصادات ومركزه نقطة الأصل





السينات:

1 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

2 $F_1(c,0), F_2(-c,0)$

3 $V_1(a,0), V_2(-a,0)$

4 $M_1(0, b), M(0,-b)$

الصادات:

1 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

2 $F_1(0,c), F_2(o, -c)$

3 $V_1(o.a), V_2(0, -a)$

4 $M_1(b,0), M_2(-b,0)$

5 $c^2 = a^2 + b^2$

6 $c > a$,, $c > b$

7 طول المحور الحقيقي $= 2a =$ العدد الثابت

8 طول المحور المرافق $= 2b$

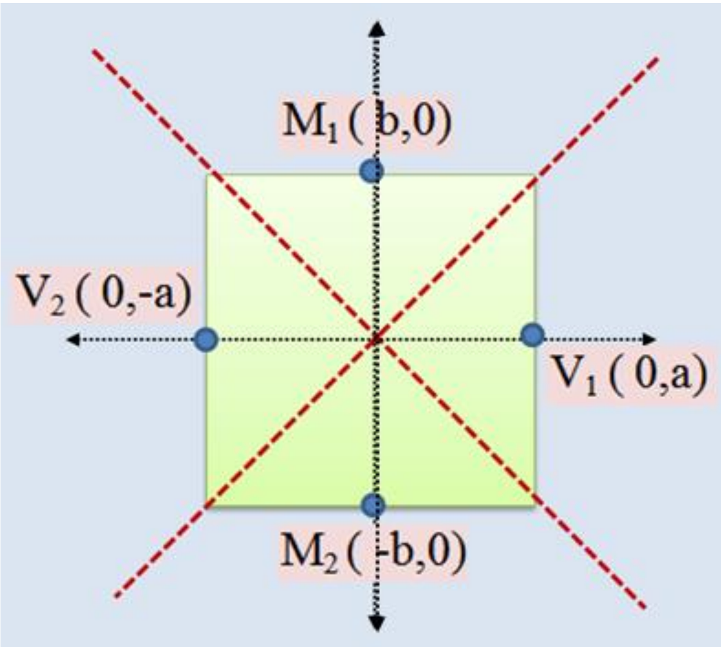
9 البعد البؤري $= 2c$

10 $e = \frac{c}{a} > 1$

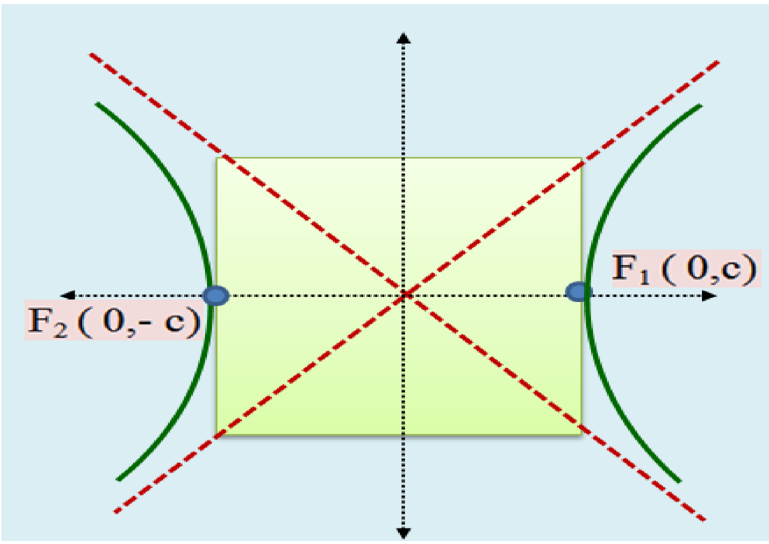
طريقة رسم القطع الزائد

لتكن $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ معادلة قطع زائد بؤرتاه تنتميان لمحور السينات

1. تعيين النقطتين $V_1(a,0), V_2(-a,0)$ الرأسان
2. تعيين النقطتين $M_1(0,b), M_2(0,-b)$ القطبان
3. نكون مستطيلا من هذه النقط اضلاعه توازي المحورين
4. نرسم قطري المستطيل فهما يمثلان المستقيمين المحاذيين لمنحني القطع الزائد.



5. نعين البؤرتين $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$ ثم نرسم ذراعي القطع الزائد



EXA

عين البؤرتين والرأسين والقطبين وطول كل من المحورين الحقيقي والمرافق للقطع الزائد ثم ارسمه.

SOL

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$a^2 = 64 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow 2a = 2(8) = 16$ طول المحور الحقيقي وحدة

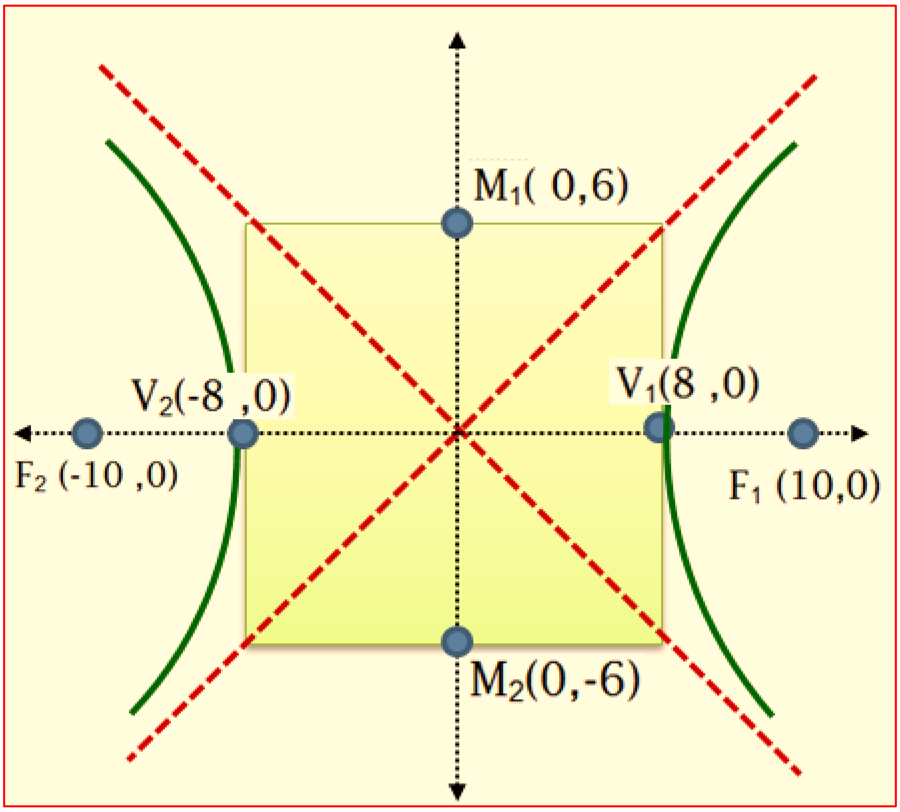
$b^2 = 36 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow 2b = 2(6) = 12$ طول المحور المرافق وحدة

$c^2 = a^2 + b^2 = 64 + 36 = 100 \Rightarrow c = 10$

البؤرتان: $F_1\,(c,0) = (10,0)$ ، $F_2\,(-c,0) = (-10,0)$

الرأسان: $V_1\,(a,0) = (8,0)$ ، $V_2\,(-a,0) = (-8,0)$

القطبان: $M_1\,(0,b) = (0,6)$ ، $M_2(0,-b) = (0,-6)$



EXA

عين كل من البؤرتين والرأسين ثم جد طول كل من المحورين والاختلاف المركزي.

1

$12x^2 - 4y^2 = 48$

SOL

$(12x^2 - 4y^2 = 48) \quad \div 48$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$

$b^2 = 12 \Rightarrow b = \sqrt{12} \Rightarrow b = 2\sqrt{3}$

طول المحور الحقيقي $= 2a = 2(2) = 4$ وحدة

طول المحور المرافق $= 2b = 2(2\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}$ وحدة

$c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 12 = 16 \Rightarrow c = 4$

البؤرتان $F_1(4,0)$ ، $F_2(-4,0)$

الرأسان $V_1(2,0)$ ، $V_2(-2,0)$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{2} = 2 > 1$$

2

$16x^2 - 9y^2 = -144$

SOL

$(16x^2 - 9y^2 = -144) \quad (-1)$

$(9y^2 - 16x^2 = 144) \quad \div 144$

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow 2a = 2(4) = 8$ وحدة طول المحور الحقيقي

$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow 2b = 2(3) = 6$ وحدة طول المحور المرافق

$c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow c = 5$

البؤرتان $F_1(0,5)$ ، $F_2(0,-5)$

الرأسان $V_1(0,4)$ ، $V_2(0,-4)$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4} > 1$$

3 $x^2 - y^2 = -4$

SOL

$(x^2 - y^2 = -4) \quad (-1)$

$(y^2 - x^2 = 4) \quad \div 4$

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 1$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow 2a = 2(2) = 4$ وحدة طول المحور الحقيقي

$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow 2b = 2(2) = 2$ وحدة طول المحور الحقيقي

$c^2 = a^2 + b^2 = 4+4 = 8 \Rightarrow c = 2\sqrt{2}$

البؤرتان $F_1(0, 2\sqrt{2})$ ، $F_2(0, -2\sqrt{2})$

الرأسان $V_1(0,2)$ ، $V_2(0,-2)$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{2} > 1$$

EXA

جد معادلة القطع الزائد الذي طول محوره المرافق 4 وحدات وبؤرتاه هما النقطتان $F_1(0,\sqrt{8}), F_2(0,-\sqrt{8})$

SOL

$F_1(0,\sqrt{8}), F_2(0,-\sqrt{8}) \Rightarrow c = \sqrt{8}$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$2b = 4 \Rightarrow b = 2$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 8 = a^2 + 4 \Rightarrow a^2 = 8 - 4 = 4$

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 1$$

القطع الزائد القائم (متساوي الاضلاع)

وهو القطع الذي يكون فيه طول المحور الحقيقي مساو طول المحور المرافق

اي يكون $a^2 = b^2$ والاختلاف المركزي فيه يساوي $e = \sqrt{2}$ دائما .

EXA

جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وطول محوره الحقيقي يساوي 6 وحدات والأختلاف المركزي يساوي 2 والبؤرتان على محور السينات.

SOL

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$2a = 6 \Rightarrow a = 3$

$e = \frac{c}{a} \Rightarrow 2 = \frac{c}{3} \Rightarrow c = 6$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 36 = 9 + b^2 \Rightarrow 36 - 9 = b^2 \Rightarrow b^2 = 27$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$$ معادلة القطع الزائد

ملاحظة

a^2 ليست اكبر من b^2 دائما فيمكن ان تكون اصغر منها او تساويها

EXA

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما $(\mp 5, 0)$ ويتقاطع مع محور السينات عند $x = \mp 3$ ومركزه نقطة الاصل.

SOL

$F_1(5,0), F_2(-5,0) \Rightarrow c = 5$

نقاط التقاطع $(3,0), (-3,0) \Rightarrow a = 3$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 25 - 9 = 16$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

EXA

جد معادلة القطع الزائد الذي طول محوره الحقيقي (12) وحدة وطول محوره المرافق (10) وحدات وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين.

SOL

$2a = 12 \qquad a = 6$

$2b = 10 \qquad b = 5$

1 عندما البؤرتان على محور السينات

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} = 1$$

2 عندما البؤرتان على محور الصادات

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{36} = 1$$

EXA

جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور الصادات وطول محوره المرافق $2\sqrt{2}$ وحدة والاختلاف المركزي يساوي 3

SOL

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$2b = 2\sqrt{2} \Rightarrow b = \sqrt{2}$

$e = \frac{c}{a} \Rightarrow 3 = \frac{c}{a} \Rightarrow c = 3a$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow (3a)^2 = a^2 + 2$

$9a^2 - a^2 = 2 \Rightarrow 8a^2 = 2 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{4}$

$$\frac{y^2}{\frac{1}{4}} - \frac{x^2}{2} = 1$$ معادلة القطع الزائد

EXA

جد معادلة القطع الزائد الذي ينطبق محوراه على المحورين الأحداثيين ويمر بالنقطة (3,0) وبعده البؤري يساوي 10 وحدات

SOL

النقطة (3,0) تمثل احد رأسي الزائد ⟵ $a = 3$

لأن القطع الزائد يمر بنقطة محورية واحدة وهي الرأس

$2c = 10 \Rightarrow c = 5$

$c^2 = a^2 + b^2 = 25 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 25 - 9 = 16$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$ معادلة القطع الزائد

EXA

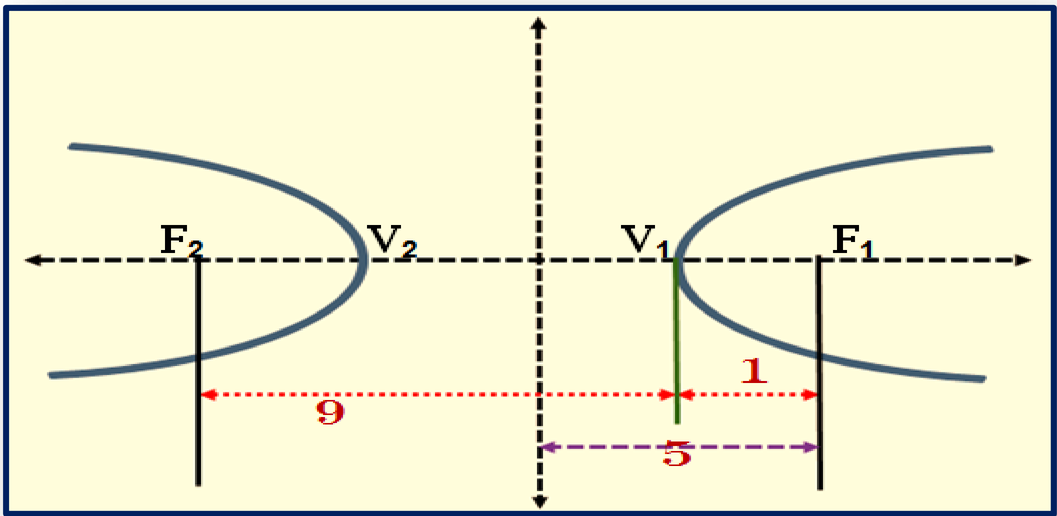
اكتب المعادلة القياسية للقطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل اذا علمت ان احد رأسيه يبعد عن البؤرتين بالعددين 1.9 وحدات على الترتيب وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين

SOL

$2c = 1 + 9 = 10 \Rightarrow c = 5$

$a = c - 1 = 5 - 1 = 4$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 16 + b^2 \Rightarrow b^2 = 25 - 16 = 9$



1 عندما البؤرتان على محور السينات

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

عندما البؤرتان على محور الصادات

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

EXA

النقطة $p(6,L)$ تنتمي الى القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل ومعادلته $x^2 - 3y^2 = 12$ جد كلا من

❶ قيمة L

❷ طول نصف القطر البؤري للقطع المرسوم في الجهة اليمنة من النقطة

SOL

$x^2 - 3y^2 = 12$

$(6,L)$ تحقق معادلة القطع الزائد

$(6)^2 - 3L^2 = 12 \Rightarrow 36 - 3L^2 = 12 \Rightarrow 3L^2 = 36 - 12$

$3L^2 = 24 \quad L^2 = 8 \Rightarrow L = \mp\sqrt{8} \Rightarrow L = \mp 2\sqrt{2}$

$P(6, \mp 2\sqrt{2})$

$(x^2 - 3y^2 = 12) \quad \div 12$

$$\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow a^2 = 12 \quad ,, \quad b^2 = 4$$

$c^2 = a^2 + b^2 = 12 + 4 = 16 \Rightarrow c = 4$

بؤرتي القطع الزائد $F_1(4,0)$, $F_2(-4,0)$

$F_1(4,0) \qquad p(6, \mp 2\sqrt{2})$

$$r_1 = pF_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(6-4)^2 + (\mp 2\sqrt{2} - 0)^2}$$

$$r_1 = \sqrt{4+8} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

EXA

اذا كانت $p(-5,\frac{9}{4})$ تنتمي الى القطع الزائد $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ جد طولي نصفي قطرين البؤرتين المرسومين من نقطة p

SOL

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow a^2=16 \;,,\; b^2=9$$

$$c^2=a^2+b^2=16+9=25 \Rightarrow c=5$$

$$F_1(5,0),F_2(-5,0) \quad p=(-5\;,\frac{9}{4})$$

$$r_1=pF_1=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(5+5)^2+(0-\frac{9}{4})^2}$$

$$=\sqrt{100+\frac{81}{16}}=\sqrt{\frac{1681}{16}}=\frac{41}{4}$$

$$r_2=pF_2=\sqrt{(-5+5)^2+(0-\frac{9}{4})^2}$$

$$=\sqrt{\frac{81}{16}}=\frac{9}{4}$$

EXA

اذا كان $\frac{9}{4}$ هو احد نصفي القطرين البؤرتين المرسومين من احدى نقاط القطع الزائد $9x^2-16y^2=144$ فما هو r_2

SOL

$$9x^2-16y^2=144$$

$$(\;9x^2-16y^2=144\;) \qquad \div 144$$

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow a^2=16 \Rightarrow a=4 \;,,\; b^2=9 \Rightarrow b=3$$

$$|r_2-r_2|=2a \Rightarrow |\frac{9}{4}-r_2|=2(4)$$

$$\frac{9}{4}-r_2=\mp 8$$

Either $\frac{9}{4} - r_2 = 8 \longrightarrow r_2 = \frac{9}{4} - 8 = \frac{9-32}{4} = \frac{-23}{4}$ يهمل

$\frac{9}{4} - r_2 = -8 \longrightarrow r_2 = \frac{9}{4} + 8 = \frac{9+32}{4} = \frac{41}{4}$

EXA

جد معادلة القطع الزائد الذي ينطبق محوراه على المحورين الأحداثيين وبؤرتاه $(0,10),(0,-10)$ ونصفي القطرين البؤرتين لاحدى النقط 5,21 وحدة

SOL

$F_1(0,10)$, $F_2(0,-10) \longrightarrow c = 10$

$|r_1 - r_2| = 2a \longrightarrow |5 - 21| = 2a$

$|-16| = 2a \longrightarrow 16 = 2a \longrightarrow a = 8$

$c^2 = a^2 + b^2 \longrightarrow 100 = 64 + b^2 \longrightarrow b^2 = 100 - 64 = 36$

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

$\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$ معادلة القطع الزائد

EXA

قطع زائد طول محوره الحقيقي (6) وحدات واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $(1,-2\sqrt{5}),(1,2\sqrt{5})$ جد معادلتي القطعين الذي مركزهما نقطة الأصل

SOL

بما انه النقطتان متناظرتان حول محور السينات

$(1,-2\sqrt{5}),(1,2\sqrt{5})$

$(1,2\sqrt{5})$ تحقق معادلة القطع المكافئ

$y^2 = 4px \longrightarrow (2\sqrt{5})^2 = 4p(1) \longrightarrow 20 = 4p \longrightarrow p = 5$

بؤرة القطع المكافئ $(5,0)$ وتمثل احدى بؤرتي القطع الزائد $c = 5$

$y^2 = 4(5)x \longrightarrow y^2 = 20x$ معادلة القطع المكافئ

$2a = 6 \longrightarrow a = 3$

$c^2 = a^2 + b^2 \longrightarrow 25 = 9 + b^2 \longrightarrow b^2 = 25 - 9 \longrightarrow b^2 = 16$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ معادلة القطع الزائد

EXA

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطعين المكافئين $y^2 = 20x$,, $y^2 = -20x$ ويمس دليل القطع المكافئ $y^2 = 12x$

SOL

$\left.\begin{array}{l} y^2 = 20x \\ y^2 = 4px \end{array}\right\}$ $4p = 20$ $p = 5$

$\left.\begin{array}{l} y^2 = 20x \\ y^2 = -4px \end{array}\right\}$ $-4p = -20$ $p = 5$

$c = 5$ وتمثلان بؤرتي القطع الزائد ,, $(5,0),(-5,0)$ بؤرتي القطعين المكافئين

$\left.\begin{array}{l} y^2 = 12x \\ y^2 = 4px \end{array}\right\}$ $4p = 12$ $p = 3$

معادلة الدليل $x = -p \Longrightarrow x = -3$

$a = 3$ ⟸ وتمثل احد رأسي القطع الزائد ،، $(-3,0)$ نقطة التماس

$c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow 25 = 9 + b^2 \Longrightarrow b^2 = 25 - 9 = 16$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$ معادلة القطع الزائد

سر النجاح هو توكل على الله
مسيرتي في السادس

EXA

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه تنطبقان على رأسي القطع الناقص $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ ويمر ببؤرتي القطع الناقص نفسه

SOL

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$a^2=25 \Rightarrow a=5$,, $b^2=9 \Rightarrow b=3$

$c^2=a^2-b^2=25-9=16 \Rightarrow c=4$

$c=5$ ⟸ وتمثلان بؤرتي القطع الزائد ,, $(5,0),(-5,0)$ رأسي القطع الناقص

$a=4$ ⟸ وتمثلان رأسي القطع الزائد ,, $(4,0),(-4,0)$ بؤرتي القطع الناقص

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow 25=16+b^2 \Rightarrow b^2=25-16=9$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$ معادلة القطع الزائد

EXA

جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل واحد رأسيه هو بؤرة القطع المكافئ $y^2=12x$ وبؤرتاه هما نقطتا تقاطع الدائرة $x^2+y^2=25$ مع محور السينات

SOL

$$\left.\begin{array}{l} y^2=12x \\ y^2=4px \end{array}\right\} 4p=12 \qquad p=3$$

$a=3$ ⟸ تمثل احد رأسي الزائد ,, $(3,0)$ بؤرة القطع المكافئ

$x^2+y^2=25$ $\quad y=0$ مع محور السينات

$x^2=25 \Rightarrow x=\mp 5$

$c=5$ وتمثلان بؤرتي القطع الزائد ,, $(5,0),(-5,0)$ نقطتا التقاطع

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow 25=9+b^2 \Rightarrow b^2=25-9=16$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$$ معادلة القطع الزائد

EXA

جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتا القطع الزائد الذي معادلته $x^2-3y^2=12$ والنسبة بين طولي محوريه يساوي $\frac{5}{3}$ ومركزه نقطة الاصل

SOL

$(x^2-3y^2=12) \quad \div 12 \longrightarrow \frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \longrightarrow a^2=12 \quad ,, \quad b^2=4$

$c^2=a^2+b^2=12+4 \longrightarrow c^2=16 \longrightarrow c=4$

$c=4$ وتمثلان بؤرتا القطع الناقص ,, $(4,0),(-4,0)$ بؤرتي القطع الزائد

$\frac{2a}{2b}=\frac{5}{3} \longrightarrow \frac{a}{b}=\frac{5}{3} \longrightarrow 3a=5b \longrightarrow a=\frac{5b}{3}$

$c^2=a^2-b^2 \longrightarrow (16=\frac{25b^2}{9}-b^2) \times 9$

$144=25b^2-9b^2 \longrightarrow 144=16b^2 \longrightarrow b^2=9 \longrightarrow b=3$

$a=\frac{5(3)}{3}=5$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ معادلة القطع الناقص

EXA

جد معادلة القطع الزائد الذي يمر ببؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ والنسبة بين البعد بين بؤرتيه الى طول محوره المرافق كنسبة $\frac{5}{4}$

SOL

$\left.\begin{array}{l}\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1 \\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\end{array}\right\} \quad a^2=49 \quad ,, \quad b^2=24$

$c^2=a^2-b^2=49-24=25 \longrightarrow c=5$

$a=5$ وتمثلان رأسي القطع الزائد ,, $(5,0),(-5,0)$ بؤرتي القطع الناقص

$$\frac{2c}{2b} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{5}{4} \Rightarrow 4c = 5b \Rightarrow c = \frac{5b}{4}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \left(\frac{25b^2}{16} = 25 + b^2\right) \times (16)$$

$$25b^2 = 400 + 16b^2 \Rightarrow 25b^2 - 16b^2 = 400 \Rightarrow 9b^2 = 400$$

$$b^2 = \frac{400}{9}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{\frac{400}{9}} = 1$$

معادلة القطع الزائد

EXA

ليكن $5y^2 - 4x^2 = h$ معادلة القطع الزائد احدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $\sqrt{5}x^2 = 4y$ فجد قيمة h

SOL

$$4y = \sqrt{5}x^2 \quad \div\sqrt{5}$$

$$x^2 = \frac{4}{\sqrt{5}}y, \quad x^2 = 4py \quad \Rightarrow \quad 4p = \frac{4}{\sqrt{5}} \qquad p = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

بؤرة القطع المكافئ $\left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ ،، تمثل احدى بؤرتي القطع الزائد $c = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$(5y^2 - 4x^2 = h) \qquad \div h$$

$$\frac{y^2}{\frac{h}{5}} - \frac{x^2}{\frac{h}{4}} = 1, \quad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad a^2 = \frac{h}{5} \quad ,, \quad b^2 = \frac{h}{4}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{5} = \frac{h}{5} + \frac{h}{4}\right) \times (20)$$

$$4 = 4h + 5h \Rightarrow 4 = 9h \Rightarrow h = \frac{4}{9}$$

EXA

عين النقط على القطع الزائد $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{1} = 1$ والتي تبعد عن البؤرة في الفرع الايمن للقطع الزائد بمقدار $\frac{1}{\sqrt{3}}$ وحدة

SOL

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{1} = 1 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{array}\right\} a^2 = 3 \quad ,, \quad b^2 = 1$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 3 + 1 \Rightarrow c^2 = 4 \Rightarrow c = 2$$

$$F_1\ (2,0) \quad , \quad F_2\ (-2,0)$$

$F_1(2,0)$, (x,y) نقطة تنتمي للقطع الزائد

$$r_1 = pF_1 = \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{x^2 - 4x + 4 + y^2}$$ بتربيع الطرفين

$$\left(\frac{1}{3} = x^2 - 4x + 4 + y^2 \right) \times 3$$

$$1 = 3x^2 - 12x + 12 + 3y^2$$

$$3x^2 - 12x + 3y^2 + 11 = 0 \qquad \dots (1)$$

$$\left(\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{1} = 1 \right) \times (3)$$

$$x^2 - 3y^2 = 3$$

$$3y^2 = x^2 - 3 \qquad \dots (2)$$

$$3x^2 - 12x + x^2 - 3 + 11 = 0$$

$$4x^2 - 12x + 8 = 0 \qquad \div 4$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x-1)\ (x-2) = 0$$

either $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow 3y^2 = 1 - 3$

$$3y^2 = -2 \Rightarrow y^2 = \frac{-2}{3} \Rightarrow y = \mp\sqrt{\frac{-2}{3}} \notin R$$

or $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow 3y^2 = 4 - 3$

$$3y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \mp \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left(2, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right), \left(2, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$ النقط

بأستخدام تعريف القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتيه (5,0),(-5,0) وينطبق محوراه على المحورين الأحداثيين والقيمة المطلقة للفرق بين بعدي اية نقطة عن بؤرتيه يساوي 6 وحدات

SOL

$$|pF_1 - pF_2| = 2a$$

$$\left|\sqrt{(x-5)^2+y^2} - \sqrt{(x+5)^2+y^2}\right| = 6$$

$$\sqrt{(x-5)^2+y^2} - \sqrt{(x+5)^2+y^2} = \mp 6$$

بتربيع الطرفين $$= \sqrt{x^2-10x+25+y^2} = \mp 6 + \sqrt{x^2+10x+25+y^2}$$

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 = 36 \mp 12\sqrt{x^2+10x+25+y^2} + x^2+10x+25+y^2$$

$$-10x-10x-36 = \mp 12\sqrt{x^2+10x+25+y^2}$$

$$-20x-36 = \mp 12\sqrt{x^2+10x+25+y^2} \qquad \div (-4)$$

بتربيع الطرفين $$5x+9 = \mp 3\sqrt{x^2+10x+25+y^2}$$

$$25x^2+90x+81 = 9(x^2+10x+25+y^2)$$

$$25x^2+90x+81 = 9x^2+90x+225+9y^2$$

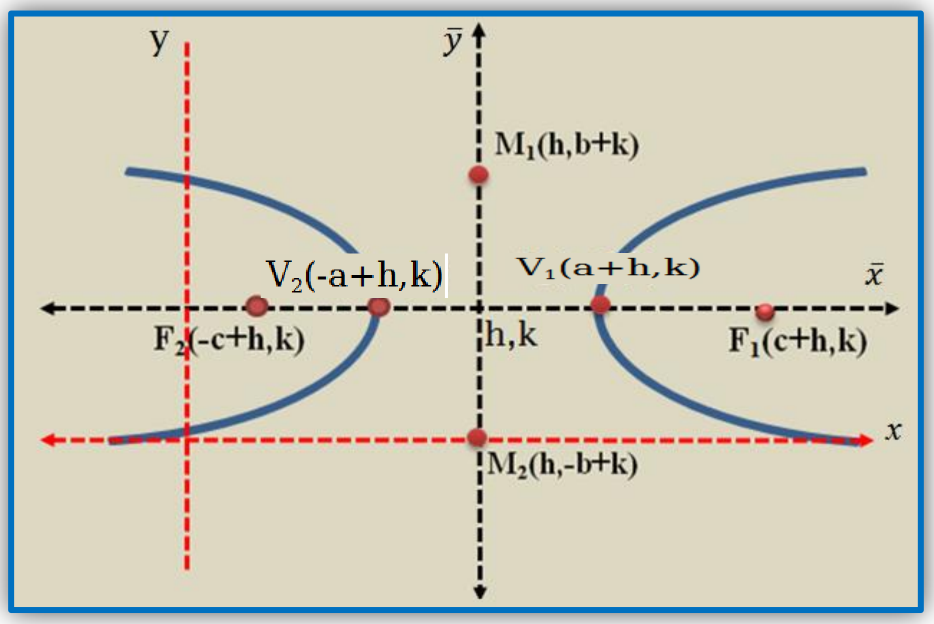
$$25x^2-9x^2-9y^2 = 225-81$$

$$16x^2 - 9y^2 = 144 \qquad \div 144$$

معادلة القطع الزائد $$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

انسحاب محاور القطع الزائد

معادلة القطع الزائد الذي مركزه النقطة (h,k) ومحوراه يوازيان المحورين المتعامدين ، حيث المحور الحقيقي يوازي محور السينات



بعد الانسحاب

معادلة $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

البؤرتان $\bar{F}_1(c+h,k)$, $\bar{F}_2(-c+h,k)$

الرأسان $\bar{V}_1(a+h,k)$, $\bar{V}_2(-a+h,k)$

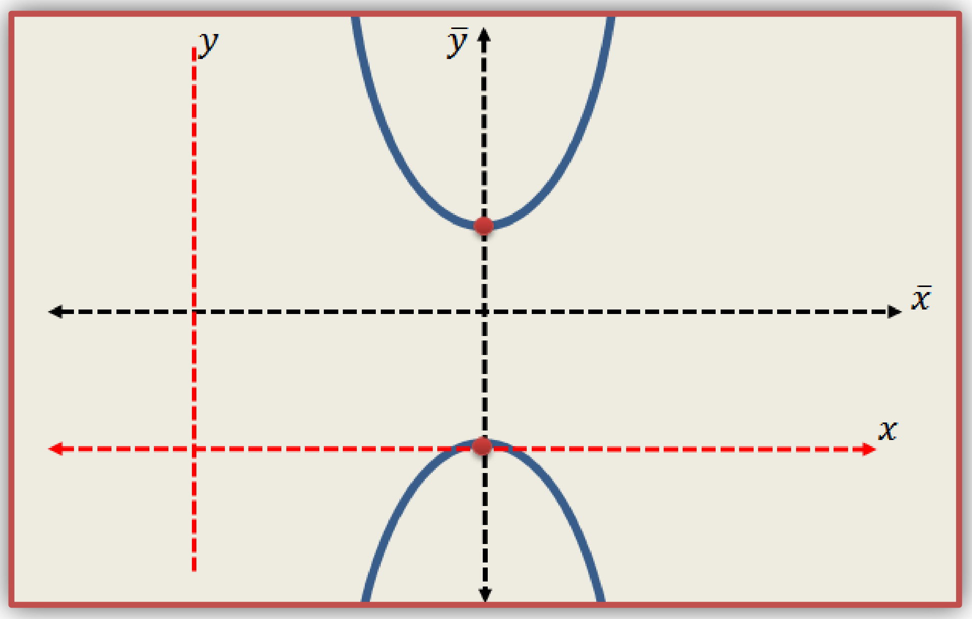
قبل الانسحاب

معادلة $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

البؤرتان $F_1(c,0), F_2(-c,0)$

الرأسان $V_1(a,0), V_2(-a,0)$

معادلة القطع الزائد الذي محوره الحقيقي يوازي محور الصادات ومركزه النقطة **(h,k)**



قبل الانسحاب

معادلة $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$

البؤرتان $F_1(0, c), F_2(0,-c)$

الرأسان $V_1(0, a), V_2(0,-a)$

بعد الانسحاب

معادلة $\dfrac{(y-k)^2}{a^2} - \dfrac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

البؤرتان $\bar{F}_1(h,c+k), \bar{F}_2(h,-c+k)$

الرأسان $\bar{V}_1(h,a+k), \bar{V}_2(h,-a+k)$

EXA

جد احداثيا المركز والبؤرتين والرأسين وطول المحورين والاختلاف المركزي للقطع الزائد

1

$$\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

SLO

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

المركز $(h, k) = (-2, 1)$

$a^2 = 9 \longrightarrow a = 3 \longrightarrow 2a = 2(3) = 6$ وحدات طول المحور الحقيقي

$b^2 = 4 \longrightarrow b = 2 \longrightarrow 2b = 2(2) = 4$ وحدات طول المحور المرافق

$c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 4 = 13 \longrightarrow c = \sqrt{13}$

$\bar{F}_1\ (c+h, k) = (\sqrt{13} - 2, 1)\ \}$ البؤرتان

$\bar{F}_2(-c+h, k) = (-\sqrt{13} - 2, 1)$

$\bar{V}_1(a+h, k) = (3-2, 1) \longrightarrow \bar{V}_1(1,1)$ الرأسان

$\bar{V}_2(-a+h, k) = (-3-2, 1) \longrightarrow \bar{V}_2(-5, 1)$

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3} > 1$ الاختلاف المركزي

2

$16x^2 + 160x - 9y^2 + 18y = 185$

SLO

$16(x^2 + 10) - 9(y^2 - 2y) = 185$

$16(x^2 + 10x + 25) - 9(y^2 - 2y + 1) = 185 + 400 - 9$

$16(+5)^2 - 9(y-1)^2 = 576 \qquad \div 576$

$$\frac{(x+5)^2}{36} - \frac{(y-1)^2}{64} = 1$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

المركز $(h, k) = (-5, 1)$

$a^2 = 36 \longrightarrow a = 6 \longrightarrow 2a = 12$ طول المحور الحقيقي

$b^2 = 64 \longrightarrow b = 8 \longrightarrow 2b = 16$ طول المحور المرافق

$c^2 = a^2 + b^2 = 36 + 64 \longrightarrow c^2 = 100 \longrightarrow c = 10$

$\bar{F}_1(c+h, k) = (10-5, 1) = (5, 1)$

$\bar{F}_2(-c+h, k) = (-10-5, 1) = (-15, 1)$

$\bar{V}_1(a+h, k) = (6-5, 1) \longrightarrow \bar{V}_1(1,1)$

$\bar{V}_2(-a+h, k) = (-6-5, 1) \longrightarrow \bar{V}_2(-11, 1)$

$e = \frac{c}{a} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} > 1$ الاختلاف المركزي

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق لطلبتي الأعزاء

الاستاذ

حسين عبد زيد خلف

07802543623

الرياضيات

2017 – 2016

السادس العلمي

حسين عبد زيد خلف

07802543623

الفصل الثالث

تطبيقات التفاضل

Applications of Differentiations

الفصل الثالث :: تطبيقات التفاضل

قـــواعد

القاعدة الأولى : مشتقة الدالة الثابتة = صفر

أي اذا كانت $y = f(x) = c$ حيث $c \in R$

فأن $y' = \frac{dy}{dx} = 0$

القاعدة الثانية : اذا كانت $f(x) = x^n$

$n \in R$, $x \in R - \{0\}$

$f'(x) = n\,x^{n-1}$

Exa جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي

[1] $f(x) = x^5$ ⟹ sol $f'(x) = 5x^4$

[2] $f(x) = x^{-2}$ ⟹ sol $f'(x) = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$

[3] $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ ⟹ sol $f'(x) = \frac{1}{2}\,x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

[4] $f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$ ⟹ sol $f'(x) = \frac{2}{3}\,x^{\frac{-1}{3}}$

⟹ $f'(x) = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x}}$

[5] $f(x) = \sqrt[5]{x^3} = x^{\frac{3}{5}}$ ⟹ sol $f'(x) = \frac{3}{5}\,x^{\frac{-2}{5}}$

⟹ $f'(x) = \frac{3}{5x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^2}}$

[6] $f(x) = \sqrt{x^5} = x^{\frac{5}{2}}$ ⟹ sol $f'(x) = \frac{5}{2}\,x^{\frac{3}{2}}$

⟹ $f'(x) = \frac{5}{2}\,x^{\frac{3}{2}} = \frac{5}{2}\sqrt{x^3}$

07802543623

[7] $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = x^{\frac{-2}{3}}$ ⟹ Sol $f'(x) = \frac{-2}{3} x^{\frac{-5}{3}}$

$= \frac{-2}{3x^{\frac{5}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^5}}$

[8] $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{-1}{2}}$ ⟹ Sol $f'(x) = \frac{-1}{2} x^{\frac{-3}{2}}$

$= \frac{-1}{2x^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{2\sqrt{x^3}}$

القاعدة الثالثة :

لتكن $g(x)$ دالة قابلة للاشتقاق ولتكن $c \in R$

$$f(x) = c \cdot g(x)$$

$$f'(x) = c \cdot g'(x)$$

القاعدة الرابعة

مشتقة مجموع عدد محدد من الدوال يساوي مجموع مشتقاتها .

أي اذا كانت كل g , f دالة قابلة للاشتقاق فان

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

Exa　جد المشتقة الاولى لكل مما يأتي

[1] $y = 3x^4 + 5x^2 - 3x + 2$

Sol $y' = \frac{dy}{dx} = 12x^3 + 10x - 3$

[2] $f(x) = x(2x^3 + 4x^2 + 1) = 2x^4 + 4x^3 + x$

Sol $f'(x) = 8x^3 + 12x^2 + 1$

[3] $f(x) = (2x - 1)(4x^2 + 5)$

Sol $f(x) = 8x^3 + 10x - 4x^2 - 5$

$f'(x) = 24x^2 + 10 - 8x$

[4] $f(x) = (5x - 2)^2 = 25x^2 - 20x + 4$

Sol $f'(x) = 50x - 20$

[5] $f(x) = 4x(3x-2)^2 = 4x(9x^2 - 12x + 4)$
$= (36x^3 - 48x^2 + 16x)$

Sol $f'(x) = 108x^2 - 96x + 16$

القاعدة الخامسة

مشتقة حاصل ضرب = الدالة الأولى × ((مشتقة الثانية) + (الدالة الثانية)(مشتقة الأولى))

$$\boxed{(f \cdot g)'(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)}$$

Exa

جد $f'(x)$ $\quad f(x) = (2x-1)(4x^2+5)$

SOL

$f'(x) = (2x-1)(8x) + (4x^2+5)(2)$
$= 16x^2 - 8x + 8x^2 + 10$
$= 24x^2 - 8x + 10$

القاعدة السادسة

$$\text{مشتقة قسمة دالتين} = \frac{(\text{المقام})(\text{مشتقة البسط}) - (\text{البسط})(\text{مشتقة المقام})}{(\text{المقام})^2}$$

حيث المقام ≠ صفر

Exa

جد $f'(x)$ حيث $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

SOL

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} = \frac{(x+1)(1)-(x-1)(1)}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

القاعدة السابعة

مشتقة دالة الدالة

أي إذا كانت $y = [f(x)]^n$

فإن $y' = \dfrac{dy}{dx} = n\,[f(x)]^{n-1}\, f'(x)$

Exa

إذا كانت $y = (1 - x)^3$ جد y' عند $x = 2$

SOL

$$y = (1 - x)^3$$

$$y' = 3(1 - x)^2(-1) = -3(1 - x)^2$$

وعند $x = 2$

$$y' = -3(1 - 2)^2 = (-3)(-1)^2 = -3$$

Exa

جد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية

SOL

1. $f(x) = \sqrt[3]{2x - x^2}$

$$f(x) = \sqrt[3]{2x - x^2} = (2x - x^2)^{\frac{1}{3}}$$

Sol $$f'(x) = \frac{1}{3}(2x - x^2)^{\frac{-2}{3}}(2 - 2x) = \frac{2 - 2x}{3(2x - x^2)^{\frac{2}{3}}}$$

2. $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$ ، $(4 - x^2) > 0$

$$f(x) = x\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{x^2(4 - x^2)} = \sqrt{4x^2 - x^4} = (4x^2 - x^4)^{\frac{1}{2}}$$

Sol $$f'(x) = \frac{1}{2}(4x^2 - x^4)^{\frac{-1}{2}}(8x - 4x^3)$$

$$= \frac{8x - 4x^3}{2(2x^2 - x^4)^{\frac{1}{2}}} = \frac{8x - 4x^3}{2\sqrt{4x^2 - x^4}}$$

قاعدة خاصـــــــة

اشتقاق الجذر التربيعي

$f(x) = \sqrt{g(x)}$ مقدار

$$f'(x) = \frac{g'(x) \text{ مشتقة المقدار}}{\text{ضعف الجذر}} = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$

Exa

$$f(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$$

Sol $$f'(x) = \frac{8x - 4x^3}{2\sqrt{4x^2 - x^4}}$$

3 $f(x) = \dfrac{2x}{(x-5)^3}$

sol $f'(x) = \dfrac{(x-5)^3(2) - 2x[3(x-5)^2(1)]}{(x-5)^6}$

$= \dfrac{(x-5)^2[2(x-5) - 6x]}{(x-5)^6} = \dfrac{2x-10-6x}{(x-5)^4} = \dfrac{-4x-10}{(x-5)^4}$

4 $y = (2x+3)(3x^2+5)^6$

$\dfrac{dy}{dx} = (2x+3)[6(3x^2+5)^5(6x)] + (3x^2+5)^6(2)$

$= 36x(2x+3)(3x^2+5)^5 + 2(3x^2+5)^6$

5 $y = \left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^5$

$y' = 5\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^4 \left(\dfrac{(x^2+1)(2x)-(x^2-1)(2x)}{(x^2+1)^2}\right)$

$= 5\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^4 \left[\dfrac{3x^2+2x \;\; -2x^3+2x}{(x^2+1)^2}\right]$

$= 5\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^4 \left(\dfrac{4x}{(x^2+1)^2}\right)$

الاشتقاق الضمني

$y = f(x)$ يعني $y =$ بدلالة x

Exa

$y = f(x) = 3x + 5$

$y = f(x) = x^2 + 3x + 5$

$y = f(x) = x^3 - 4x + 2$

$4xy - 4x = 6 \Rightarrow 4xy = 6 + 4x \Rightarrow \therefore y = \dfrac{6+4x}{4x}$

أما العلاقة $x^3 + y^3 + x^3 y = x + 5$ يصعب فيها التعبير عن y بدلالة x

Exa

جد y' لمنحني الدائرة $x^2 + y^2 = 49$

SOL

$x^2 + y^2 = 49$

$2x + 2yy' = 0 \qquad \div 2$

$x + yy' = 0 \Rightarrow yy' = -x \Rightarrow y' = \dfrac{-x}{y}$

Exa

جد $\dfrac{dy}{dx}$ للقطع الزائد $3x^2 - 4y^2 = 36$

SOL

$3x^2 - 4y^2 = 36$

$3x^2 - 4y^2 = 36$

$6x - 8y\dfrac{dy}{dx} = 0 \qquad \div 2$

$3x - 4y\dfrac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 4y\dfrac{dy}{dx} = 3x \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x}{4y}$

الثقة بالنفس بعد التوكل على الله مطلوبة شرعا، فالمســـــلم يتعين عليه أن يحسن الظن بالله تعالى، وأن يتفاءل لنفســــه الخير والنجاح دائماً، ويسعى باستمرار في سبيل الارتقـــــاء لتحصيل الكمال

المشتقات ذات الرتب العليا

اذا كانت $y = f(x)$ دالة تتوافر فيها شروط الاشتقاق فان مشتقتها الاولى

$$y' = \left(\frac{dy}{dx}\right) = f'(x)$$

هي وتمثل دالة جديدة .

والدالة الجديدة هذه اذا توافر فيها شروط الاشتقاق فان مشتقتها دالة جديدة تمثل المشتقة

الثانية ويرمز لها بالرمز $y'' = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = f''(x)$

وهذه ايضا دالة جديدة للمتغير (x)

واذا توافرت فيها شروط الاشتقاق فان مشتقتها تسمى المشتقة الثالثة

$$y''' = \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = f'''(x)$$

وعلى هذا المنوال يمكن ايجاد مشتقات متتالية بدءا من المشتقة الثانية يطلق على هذه المشتقات بالمشتقات العليا وتكتب المشتقة من الرتبة كما يلي

$$y^{(n)} = \left(\frac{d^ny}{dx^n}\right) = f^{(n)}(x)$$

حيث n عدد صحيح موجب

من رموز المشتقات

1 - $f'(x)$ ، $f''(x)$ ، $f'''(x)$ .... ، $f^{(n)}(x)$

2 - y' ، y'' ، y''' .... ، $y^{(n)}$

3 - $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{d^2y}{dx^2}$ ، $\frac{d^3y}{dx^3}$ .... ، $\frac{d^ny}{dx^n}$

حيث $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{dy}{dx}$

وكذلك $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\frac{d^2}{dx^2}$

ومن مثال للمشتقات المتتالية نأخذ الدالة الاتية

$S = f(t)$ تمثل ازاحة جسم عند اي زمن (t)

فالمشتقة الاولى $\frac{ds}{dt} = f'(t)$ وتمثل السرعة اللحظية لذلك الجسم

والمشتقة الثانية $= f''(t)$ $\dfrac{d^2s}{dt^2}$

تمثل معدل تغير السرعة (**التعجيل للجسم المتحرك**)

اما المشتقة الثالثة للإزاحة بالنسبة للزمن (t) ، $= f'''(t)$ $\dfrac{d^3s}{dt^3}$

فتمثل المعدل اللحظي لتغير التعجيل

Exa جد $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ لكل مما ياتي

1 $y = (\sqrt{2-x})$ $\quad \forall x < 2$

SOL $y = (\sqrt{2-x}) = (2-x)^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(2-x)^{\frac{-1}{2}}(-1) = \frac{-1}{2}(2-x)^{\frac{-1}{2}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)(2-x)^{\frac{-3}{2}}(-1) = \frac{-1}{4(2-x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{4\sqrt{(2-x)^3}}$$

2 $y = \dfrac{2-x}{2+x}$ $\quad x \neq -2$

SOL
$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2+x)(-1)-(2-x)(1)}{(2+x)^2} = \frac{-2-x-2+x}{(2+x)^2} = \frac{-4}{(2+x)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(2+x)^2(0)-(-4)[2(2+x)]}{(2+x)^4} = \frac{+8(2+x)}{(2+x)^4} = \frac{8}{(2+x)^3}$$

Exa

اذا كانت $y = \dfrac{3x+1}{(x-1)^2}$ $\quad x \neq 1$

فاثبت ان $(x-1)^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + 4(x-1)\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$

SOL

$$y = \frac{3x+1}{(x-1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)^2(3)-(3x+1)[(2(x-1)]}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)\,[3(x-1)-(2(3x+1)]}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{3x-3-6x-2}{(x-1)^3} = \frac{-3x-5}{(x-1)^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x-1)^3(-3)-(-3x-5)[3\,(x-1)^2]}{(x-1)^6}$$

$$= \frac{(x-1)^2[-3(x-1)-3(-3x-5)\,]}{(x-1)^6}$$

$$= \frac{-3x+3+9x+15}{(x-1)^4} = \frac{6x+18}{(x-1)^4}$$

L.H.S $\quad (x-1)^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + 4(x-1)\dfrac{dy}{dx} + 2y$

$$= (x-\cancel{1})^2\left(\frac{6x+18}{(x-1)^{\cancel{4}}}\right) + 4\,(\cancel{x-1})\left(\frac{-3x-5}{(x-1)^{\cancel{3}}}\right) + 2\left(\frac{3x+1}{(x-1)^2}\right)$$

$$= \frac{6x+18}{(x-1)^2} + \frac{-12x-20}{(x-1)^2} + \frac{6x+2}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{6x+18-12x-20+6x+2}{(x-1)^2} = \frac{0}{(x-1)^2} = 0 =$$ **R.H.S**

Exa

جد $f'''(x)$ لكل مما ياتي عندما $x = 1$

1 $f(x) = 4\sqrt{6-2x} \qquad x < 3$

SOL $f(x) = 4(6-2x)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = 4\left(\frac{1}{2}\right)(6-2x)^{\frac{-1}{2}}(-2) = -4(6-2x)^{\frac{-1}{2}}$$

$$f''(x) = -4\left(\frac{-1}{2}\right)(6-2x)^{\frac{-3}{2}}(-2) = -4(6-2x)^{\frac{-3}{2}}$$

$$f'''(x) = -4\left(\frac{-3}{2}\right)(6-2x)^{\frac{-5}{2}}(-2) = -12(6-2x)^{\frac{-5}{2}}$$

$$= \frac{-12}{(6-2x)^{\frac{5}{2}}}$$

عند $x=1$

$$f'''(1) = \frac{-12}{(6-2(1))^{\frac{5}{2}}} = \frac{-12}{(4)^{\frac{5}{2}}} = \frac{-12}{(2)^{2\cdot\frac{5}{2}}} = \frac{-12}{(2)^5} = \frac{-12}{32} = \frac{-3}{8}$$

2 $f(x) = \frac{3}{2-x} \qquad x \neq 2$

SOL $f(x) = \frac{3}{2-x}$

$$f(x) = 3(2-x)^{-1}$$

$$f'(x) = -3(2-x)^{-2}(-1) = 3(2-x)^{-2}$$

$$f''(x) = -6(2-x)^{-3}(-1) = 6(2-x)^{-3}$$

$$f'''(x) = -18(2-x)^{-4}(-1) = \frac{18}{(2-x)^4}$$

عند $x=1$

$$f'''(1) = \frac{18}{(2-x)^4} = \frac{18}{(2-1)^4} = \frac{18}{1} = 18$$

ايجاد "y للمعادلة الضمنية

Exa

اذا كانت $x^2 + xy + y^2 = 3$ جد y''

SOL

$$x^2 + xy + y^2 = 3$$

$$2x + x\frac{dy}{dx} + y(1) + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x + x\frac{dy}{dx} + y + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2 + x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}(1) + \frac{dy}{dx} + 2y\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\left(2\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$2 + x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

$$(x + 2y)\frac{d^2y}{dx^2} = -2 - 2\frac{dy}{dx} - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2 - 2\frac{dy}{dx} - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{x + 2y}$$

Exa

اذا علمت بأن $x^2 + y^2 = 1$ فبرهن $y\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dy}{dx} = 0$

SOL

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \div 2 \quad \Rightarrow \quad x + y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$1 + y\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

$$y\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dy}{dx} + 2\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

$$y\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dy}{dx} = 0$$

جد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل مما يأتي

Exa

1. $y^3 - 8 = x^2$

SOL

$$3y^2 \frac{dy}{dx} = 2x$$

$$3y^2 . \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\left((6y)\frac{dy}{dx}\right) = 2$$

$$3y^2 . \frac{d^2y}{dx^2} + (6y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2$$

$$3y^2 . \frac{d^2y}{dx^2} = 2 - (6y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2-6y.\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{3y^2}$$

2. $x^5 - y^5 = 33$

SOL

$$5x^4 - 5y^4 . \frac{dy}{dx} = 0 \qquad \div 5$$

$$x^4 - y^4 . \frac{dy}{dx} = 0$$

$$4x^3 - \left[y^4 . \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\left(4y^3 \frac{dy}{dx}\right)\right] = 0$$

$$4x^3 - y^4 \frac{d^2y}{dx^2} - 4y^3 . \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

$$y^4 \frac{d^2y}{dx^2} = 4x^3 - 4y^3 . \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4x^3 - 4y^3 .\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{y^4}$$

② $2xy - 4y + 5 = 0$

SOL $2x\frac{dy}{dx} + y(2) - 4\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \div 2$

$$x\frac{dy}{dx} + y - 2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$x \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}(1) + \frac{dy}{dx} - 2\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

$$(x-2)\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(x-2)\frac{d^2y}{dx^2} = -2\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2\frac{dy}{dx}}{x-2}$$

مشتقات الدوال الدائرية

y = نسبة الزاوية

$\frac{dy}{dx}$ = مشتقة النسبة × مشتقة الزاوية

1. $\frac{d}{dx}\sin\theta = \cos\theta\,\frac{d\theta}{dx}$

2. $\frac{d}{dx}\cos\theta = -\sin\theta\,\frac{d\theta}{dx}$

3. $\frac{d}{dx}\tan\theta = \sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dx}$

4. $\frac{d}{dx}\cot\theta = -\csc^2\theta\,\frac{d\theta}{dx}$

5. $\frac{d}{dx}\sec\theta = \sec\theta\,.\tan\theta\,\frac{d\theta}{dx}$

6. $\frac{d}{dx}\csc\theta = -\csc\theta\,.\cot\theta\,\frac{d\theta}{dx}$

جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي

[1] $y = \sin(x^2+3)$

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x^2+3)(2x) = 2x\,.\cos(x^2+3)$$

[2] $y = \sin x^2 + 3$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x^2 . (2x) + 0 = 2x . \cos x^2$$

[3] $y = \cos(3 - x^2)$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin(3 - x^2)\ (-2x) = 2x . \sin(3 - x^2)$$

[4] $y = \sin(4x) + \tan 3x^2$

$$\frac{dy}{dx} = \cos 4x\,(4) + \sec^2 3x^2\ (6x)$$

$$= 4\cos 4x + 6x . \sec^2 3x^2$$

[5] $y = \tan(\cos x)$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2(\cos x) . (-\sin x)\ (1)$$

$$= (-\sin x) . \sec^2(\cos x)$$

[6] $y = \tan x . \cos x$

$$\frac{dy}{dx} = \tan x . (-\sin x) + \cos x . \sec^2 x$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} . (-\sin x) + \cos x . \frac{1}{\cos x^2}$$

$$= \frac{-\sin^2 x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x} = \frac{-\sin^2 x + 1}{\cos x}$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\cos x} = \cos x$$

[7] $y = \tan x - x$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x - 1 = \tan^2 x$$

[8] $y = \mathrm{Sec}\,\pi x^2$

$$\frac{dy}{dx} = \sec \pi x^2 . \tan \pi x^2\ (2\pi x)$$

$$\frac{dy}{dx} = (2\pi x)\ \sec \pi x^2 . \tan \pi x^2$$

[9] $y = \csc\sqrt{3-x}$

$$\frac{dy}{dx} = -\csc\sqrt{3-x}\ .\ \cot\sqrt{3-x}\ .\ \frac{-1}{2\sqrt{3-x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{3-x}}\ .\ \csc\sqrt{3-x}\ .\ \cot\sqrt{3-x}$$

[10] $y = \sin^2 3x = (\sin 3x)^2$

$$\frac{dy}{dx} = 2\sin 3x\ .\ \cos 3x\,(3)$$

$$\frac{dy}{dx} = 6\sin 3x\ .\ \cos 3x = 3\sin 6x$$

[11] $y = \sin 3x^2$

$$\frac{dy}{dx} = \cos 3x^2\ .\ (6x) = 6x\cos 3x^2$$

[12] $y = 4\tan^3(x^2+1) = 4[\tan(x^2+1)]^3$

$$\frac{dy}{dx} = 4(3)[\tan(x^2+1)]^2\ .\ \sec^2(x^2+1)\ .\ (2x)$$

$$= 24x\ .\ \tan^2(x^2+1)\ .\ \sec^2(x^2+1)$$

[13] $y = \sec^3(x^2+1) = [\sec(x^2+1)]^3$

$$\frac{dy}{dx} = 3[\sec(x^2+1)]^2\ .\ \sec(x^2+1)\ .\ .\ \tan(x^2+1)(2x)$$

$$= 6x\ .\ \sec^3(x^2+1)\ .\ \tan(x^2+1)$$

EXA

اذا كانت $y = \cos 2x$ جد $\frac{d^4 y}{dx^4}$

SOL

$$y = \cos 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin 2x\,(2) = -2\sin 2x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2\cos 2x\,(2) = -4\cos 2x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -4(-\sin 2x)(2) = 8\sin 2x$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = 8(\cos 2x)(2) = 16\cos 2x$$

EXA

جد $f'''(1)$ حيث $f(x) = \sin \pi x$

SOL

$$f(x) = \sin \pi x$$
$$f'(x) = \cos \pi x \ \pi = \pi \cos \pi x$$
$$f''(x) = \pi(-\sin \pi x)(\pi) = -\pi^2 \sin \pi x$$
$$f'''(x) = -\pi^2(\cos \pi x)(\pi) = -\pi^3 \cos \pi x$$
$$f'''(1) = -\pi^3 \cos \pi(1) = -\pi^3 \cos \pi$$
$$f'''(1) = -\pi^3(-1) = \pi^3$$

EXA

اذا كانت $y = \tan x$ فبرهن ان $\frac{d^2 y}{dx^2} = 2y(1+y^2)$

حيث $\forall n \in$ ، $x \neq \frac{(2n+1)\pi}{2}$

SOL

$$y = \tan x$$
$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x = (\sec x)^2$$
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 2\sec x \ . \sec x \ . \tan x$$
$$= 2\tan x \ . \sec^2 x$$
$$= 2\tan x \ (1+\tan^2 x)$$
$$= 2y\ (1+y^2)$$

$\sec^2 x = (1+\tan^2 x)$

EXA

اذا كانت $y = x \,.\, \sin x$ فبرهن ان $y^{(4)} - y + \cos x = 0$

SOL

$$y = x \,.\, \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = x \cos x + \sin x\,(1) = x \cos x + \sin x$$

$$y'' = x\,(-\sin x) + \cos x\,(1) + \cos x$$

$$= -x \sin x + 2 \cos x$$

$$y''' = -x \cos x + \sin x\,(-1) + 2\,(-\sin x)$$

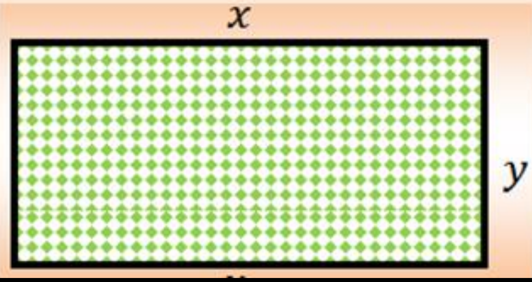
$$= -x \cos x - 3 \sin x$$

$$y^{(4)} = -x\,(-\sin)\,x + \cos x\,(-1) - 3 \cos x$$

$$y^{(4)} = x \sin x - 4 \cos x = y - 4 \cos x$$

$$y^{(4)} - y + 4 \cos x = 0$$

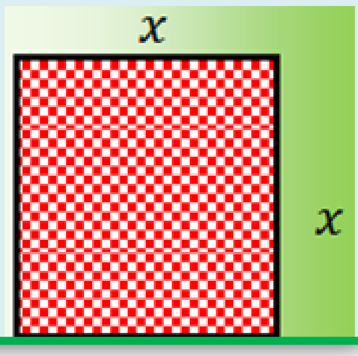
المعدلات المرتبطة



المستطيل

المساحة = $x\,y$

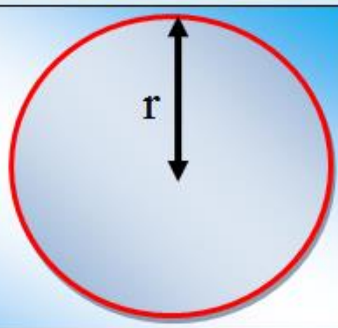
المحيط = $2x + 2y = 2(x+y)$



المربع

المساحة = x^2

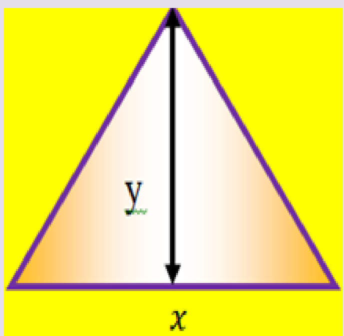
المحيط = $4x$



الدائرة

المساحة = πr^2

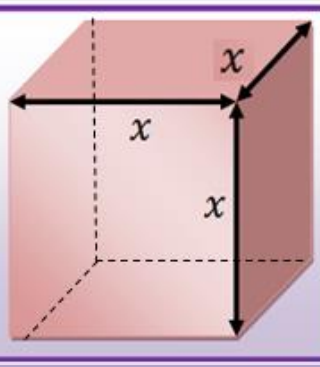
المحيط = $2\pi r$



المثلث

المساحة = $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$

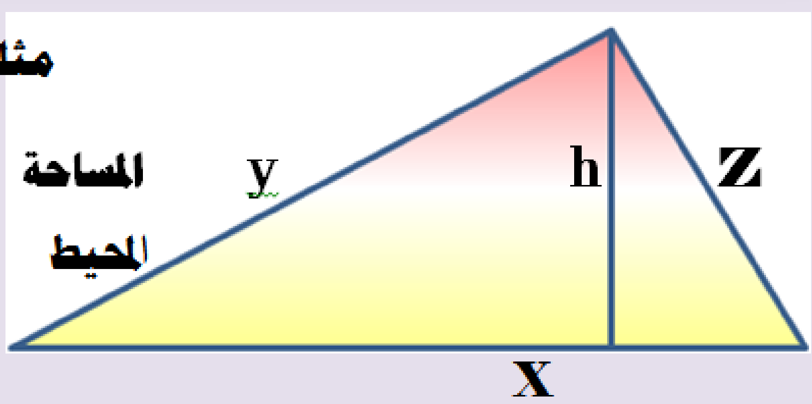
المحيط = مجموع أضلاعه الثلاث



المكعب

الحجم = x^3

المساحة الكلية = $6x^2$

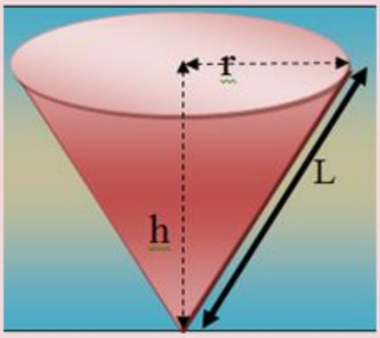


مثلث

المساحة = $1/2 X h$

المحيط = $X + y + Z$

07802543623



المخـــروط

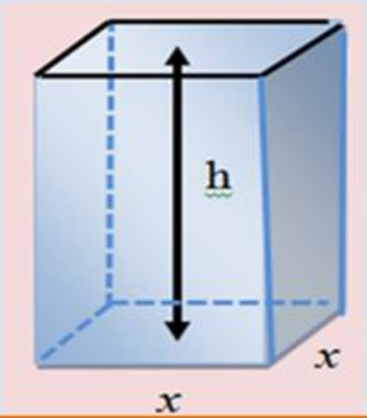
الحجـــم = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

المساحة الكلية = $\pi r L + \pi r^2$

الكـــرة

الحجـــم = $\frac{4}{3}\pi r^3$

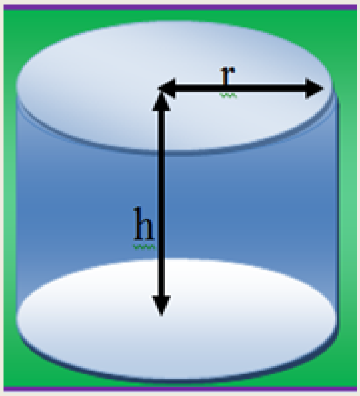
المساحة الكلية = $4\pi r^2$



متوازي المستطيلات ذو القاعدة المربعة

الحجـــم = $x^2 h$

المساحة الكلية = $4x h + 2x^2$



الاسطوانـــة

الحجـــم = $\pi r^2 h$

المساحة الكلية = $2\pi r h + 2\pi r^2$

07802543623

المعدلات المرتبطة :

لحل أي سؤال يتعلق بالمعدلات المرتبطة نتبع ما يلي

1- نرسم مخططاً للمسألة (أن احتجت الى ذلك)

2- نحدد المتغيرات والثوابت ونرمز لها بالرموز .

3- نحدد العلاقة الرئيسية في حل السؤال .

4- نحاول ايجاد علاقة اخرى بين المتغيرات لكي نقلل من عدد المتغيرات .

5- نشتق الطرفين بالنسبة للمتغير (الزمن) **(t)**

6- نعوض معطيات السؤال من المتغيرات بعد الاشتقاق .

EXA

بالون كروي مملوء بالغاز فيه ثقب يتسرب منه الغاز فاذا كان معدل نقصان نصف قطره ($\frac{7}{22}$ cm /s) بحيث يحافظ على شكله الكروي جد

1- معدل النقصان في المساحة السطحية عندما يكون نصف قطره (10 cm)

2- معدل النقصان في حجمه .

SOL

$$\frac{dr}{dt} = \frac{-7}{22}\ cm/s \ ، \ r = (10\ cm) \ ، \ \frac{dA}{dt} = ? \ ، \ \frac{dV}{dt} = ?$$

$$A = 4\pi r^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 8\pi\ r\ \frac{dr}{dt} = 8\left(\frac{22}{7}\right).\ 10\left(\frac{-7}{22}\right)$$

$$= -80\ cm^2/s$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dV}{dt} = 4\ \pi\ r^2\ \frac{dr}{dt} = 4\left(\frac{22}{7}\right)(10)^2\left(\frac{-7}{22}\right)$$

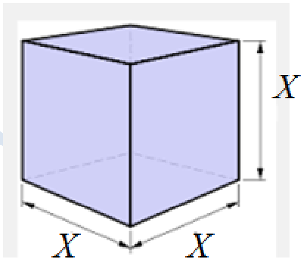
$$= -400\ cm^3/s$$

07802543623

مكعب من الثلج يذوب بحيث يظل شكله مكعباً فاذا كان حجمه يتناقص بمعدل $0,03\ cm^3/s$. جد معدل نقصان طول حرفه ومساحته السطحية عندما يكون طول حرفه (10 cm)

SOL

$$\frac{dV}{dt} = -0.03\ cm^3/s \ ,\quad \frac{dx}{dt} = ? \ ,\quad \frac{dA}{dt} = ? \ ,\quad x = 10cm$$



$$V = x^3$$

$$\frac{dV}{dt} = 3x^2 \frac{dx}{dt}$$

$$-0.03 = 3(10)^2 \frac{dx}{dt} \Longrightarrow -0.03 = 300 \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-0.03}{300} = \frac{-1}{10000} = -0.0001\ cm/s$$

$$A = 6x^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 12x \frac{dx}{dt} = 12(10)(-0.0001) = -0.012\ Cm^2/s$$

مكعب صلد طول حرفه (8 cm) مغطى بطبقة من الجليد بحيث شكله يبقى مكعبا . فاذا بدأ الجليد بالذوبان بمعدل ($6\ cm^3/s$) . فجد معدل النقصان بسمك الجليد في اللحظة التي يكون هذا السمك (1 cm)

SOL

$$\frac{dV}{dt} = -6\ cm^3/s \ ,\quad \frac{dx}{dt} = ? \ ,\quad x = 1\ cm$$

حجم الجليد = حجم المكعب الكلي – حجم المكعب الأصلي

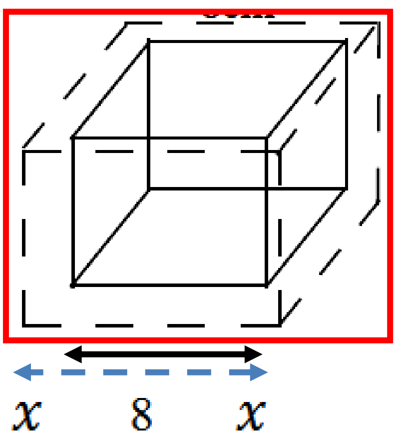
$$V = (8 + 2x)^3 - (8)^3$$

$$\frac{dV}{dt} = 3(8 + 2x)^2 \left(2 \frac{dx}{dt}\right)$$

$$-6 = 3[8 + 2(1)]^2 \cdot 2 \frac{dx}{dt}$$

$$-6 = 6(100) \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-6}{600} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -0.01\ (cm/s)$$



EXA

كرة حديدية نصف قطرها (4 cm) مغطاة بطبقة من الجليد . فاذا بدأ الجليد بالذوبان بمعدل ($10\ cm^3/s$) . جد سرعة النقصان سمك الجليد في اللحظة التي يكون هذا السمك (2 cm)

SOL

$r = 4 + x$ ، $\frac{dV}{dt} = -10\ cm^3/s$ ، $\frac{dx}{dt} = ?$ ، $x = 2\ cm$

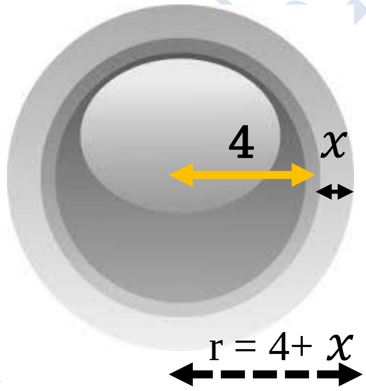
$$V = \frac{4}{3}\pi(4+x)^3$$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi(4+x)^2\frac{dx}{dt}$$

$$-10 = 4\pi(4+2)^2\frac{dx}{dt}$$

$$-10 = 144\pi\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-10}{144\pi} = \frac{-5}{72\pi}\ cm$$



EXA

خزان مملوء بالماء على شكل متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة طولها 2 m يتسرب منه ماء بمعدل $0.4\ m^3/h$. جد معدل تغير انخفاض الماء في الخزان عند أي زمن (t) ؟

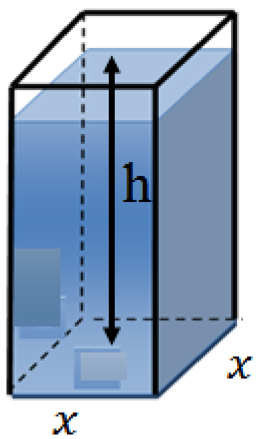
SOL

$\frac{dh}{dt} = ?$ ، $\frac{dV}{dt} = -0.4\ m^3/h$ ، $x = 2$

$$V = x^2 h = (2)^2 h = 4h$$

$$\frac{dV}{dt} = 4\frac{dh}{dt}$$

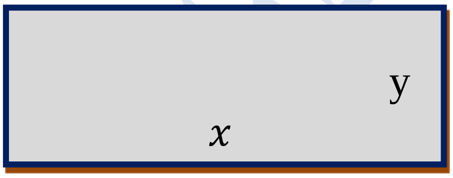
$$-0.4 = 4\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{-0.4}{4} = -0.1\ m/h$$



صفيحة مستطيلة الشكل من المعدن مساحتها $96\ cm^2$ يتمدد طولها بمعدل $2\ cm / s$ بحيث تبقى مساحتها ثابتة . جد معدل النقصان في عرضها وذلك عندما يكون عرضها $8\ cm$ ؟

SOL

$$A = 96\ cm^2 \ ، \ \frac{dx}{dt} = 2\ cm \ ، \ \frac{dy}{dt} = ? \ ، \ y = 8\ cm$$



$$A = x\ y$$

$$96 = x\ y$$

$$0 = x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}$$

$$96 = x\ (8)$$

$$x = \frac{96}{8} = 12$$

$$0 = 12\frac{dy}{dt} + (8)(2)$$

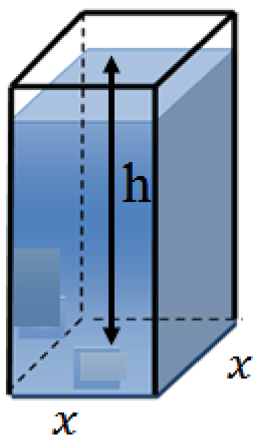
$$0 = 12\frac{dy}{dt} + 16$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-16}{12} = \frac{-4}{3}\ cm / s$$

متوازي مستطيلات قاعدته مربعة وارتفاعه ثلاثة امثال طوله . ضلعه يتمدد بالحرارة . جد معدل التغيير في حجمه و مساحته السطحية في اللحظة التي يكون فيها طـــول قاعدته $8\ cm$. علما بان التغير في طرف قاعدته $\frac{1}{4}\ cm/s$

SOL

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{4}\ cm\ /s \ , \ x = 8 \ , \ \frac{dV}{dt} = ? \ , \ \frac{dA}{dt} = ?$$



1

$$V = x^2 h \quad \text{.........} \ (1)$$

$$h = 3x \quad \text{.........} \ (2)$$

$$V = x^2 (3x) = 3x^3$$

$$\frac{dV}{dt} = 9x^2 \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = 9(8)^2 \frac{1}{4} = 9(64)\ \frac{1}{4} = 144\ cm^3/s$$

2 $A = 4x\,h + 2x^2$

$A = 4x(3x) + 2x^2 = 12x^2 + 2x^2 = 14x^2$

$\frac{dA}{dt} = 28x \frac{dx}{dt} = 28(8) \cdot \frac{1}{4} = 56 \ cm^2/s$

اسطوانة دائرية قائمة يزداد ارتفاعها بمعدل $0.5 \ cm / S$ بحيث يظل حجمها مساويا $320\pi \ cm^3$. جد معدل التغير في نصف قطر قاعدتها عندما يكون الارتفاع $0.5 \ cm$ ؟

$V = 320\pi \ cm^3$ ، $\frac{dh}{dt} = 0.5 \ cm/s$ ، $\frac{dr}{dt} = ?$ ، $h = 5 \ cm$

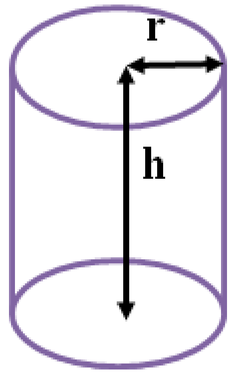
SOL

$V = \pi r^2 h$

$320\pi = \pi r^2 h$

$320 = r^2 h$

$0 = r^2 \frac{dh}{dt} + h(2r)\frac{dr}{dt}$ ....(1)



$320 = r^2(5) \Rightarrow r^2 = \frac{320}{5}$

$r^2 = 64 \Rightarrow r = 8$

نعوض في (1)

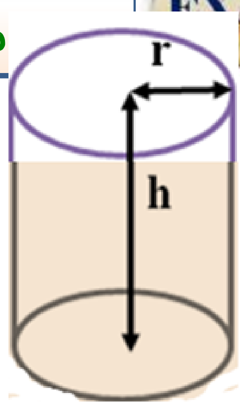
$0 = (8)^2(0.5) + (5)(2)(8)\frac{dr}{dt}$

$80\frac{dr}{dt} = -32 \qquad \frac{dr}{dt} = \frac{-32}{80} = -0.4 \ cm/s$

خزان على شكل اسطوانة دائرية قائمة طول قطر قاعدته $30 \ cm$ يراد تفريغ من النفط بمعدل $2 \ cm^3/s$ فما معدل ارتفاع النفط في الخزان ؟

، $\frac{dV}{dt} = -2$ ، $\frac{dh}{dt} = ?$ ، $r = 15 \ cm$

SOL



$V = \pi r^2 h = \pi (15)^2 h = 225\pi h$

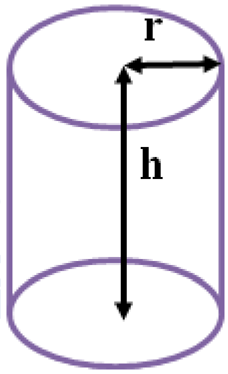
$\frac{dV}{dt} = 225\pi \frac{dh}{dt} \Rightarrow -2 = 225\pi \frac{dh}{dt}$

$\frac{dh}{dt} = \frac{-2}{225\pi} \ cm/s$

اسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها 5 cm ونصف قطر قاعدتها 8 cm فاذا زاد ارتفاعها بمعدل 0.5 m/m وتناقص نصف قطر قاعدتها بمعدل 0.3 m/m جد معدل تغير حجمها

$\frac{dV}{dt} = ?$ ، $\frac{dh}{dt} = 0.5$ ، $\frac{dr}{dt} = -0.3$ ، r = **8 cm** ، h = **5 cm**

SOL



$$V = \pi r^2 h$$

$$\frac{dV}{dt} = \pi [r^2 \frac{dh}{dt} + h \,.\, (2 r \frac{dr}{dt})]$$

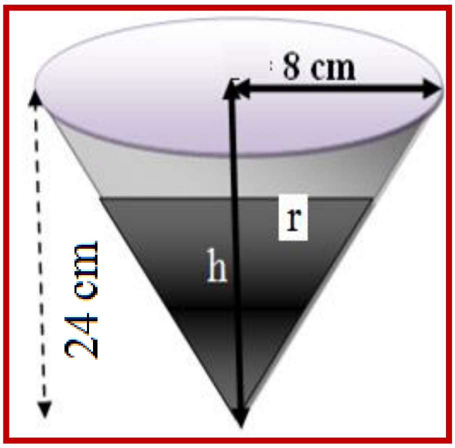
$$\frac{dV}{dt} = \pi [\, 64 \,(0.5) + 2\,(5)\,(8)\,(-0.3)\,]$$

$$\frac{dV}{dt} = \pi [\, 32 - 24 \,] = 8\pi \ m^3/m$$

مرشح مخروطي قاعدته أفقية ورأسه للأسفل ارتفاعه يساوي 24cm وطول قطر قاعدته 16 cm يصب فيه سائل بمعدل 5 cm ³ / s بينما يتسرب منه السائل بمعدل 1 cm ³ / s .
جد معدل تغير عمق السائل في اللحظة التي يكون عمق السائل 12 cm ؟

$\frac{dV}{dt} = 5 - 1 = 4 \ cm^2/s$ ، $\frac{dh}{dt} = ?$ ، h = **5 cm**

SOL



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \quad ....(1)$$

من التشابه

$$\frac{r}{8} = \frac{h}{24} \Rightarrow 24 r = 8 h \Rightarrow h = 3 r$$

$$r = \frac{1}{3} h \quad .... (2)$$

نعوضها (1) ينتج

$$V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{1}{3} h\right)^2 h = \frac{1}{27} \pi h^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{9} \,.\, \pi h^2 \,.\, \frac{dh}{dt}$$

$$4 = \frac{1}{9} \,.\, \pi \,.\, (12)^2 \frac{dh}{dt} \Rightarrow 4 = \frac{1}{9} \,.\, \pi \,.\, (144) \frac{dh}{dt}$$

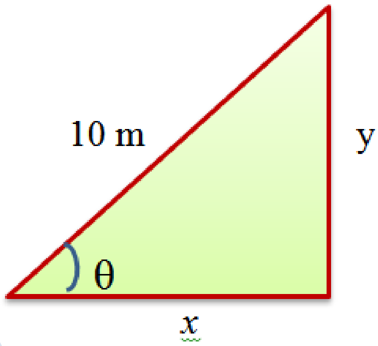
$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{16\pi} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{4\pi} \ cm/s$$

EXA

سلم طوله 10 m يستند طرفه الأسفل على أرض أفقية وطرفه العلوي على حائط رأسي . فإذا انزلق الطرف الأسفل مبتعداً عن الحائط بمعدل 2m/s عندما يكون الطرف الأسفل على بعد 8 m عن الحائط جد ::
1- معدل انزلاق ا لطرف العلوي . 2- سرعة تغير الزاوية بين السلم والأرض

$$\frac{dx}{dt} = 2 \text{ cm/s} \quad ، \quad x = \mathbf{8\ cm}$$

SOL



1

$$x^2 + y^2 = 100$$

$$\left[2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \right] \div 2$$

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0 \quad .... \ (1)$$

$$x^2 + y^2 = 100$$

$$64 + y^2 = 100$$

$$y^2 = 100 - 64 = 36 \Rightarrow y^2 = 36 \Rightarrow y = 6$$

$$8 . (2) + 6\frac{dy}{dt} = 0$$

$$6\frac{dy}{dt} = -16 \rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-16}{6} \rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{8}{3} \ \text{m/s}$$

2

$$\sin\theta = \frac{y}{10}$$

$$\cos\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{8}{10}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10}.\left(\frac{-8}{3}\right) \qquad \times \frac{10}{8}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-1}{3} \ \text{red/s}$$

EXA

سلم يستند طرفه الأسفل على أرض أفقية وطرفه العلوي على حائط رأسي ، فإذا انزلق الطرف الأسفل مبتعداً عن الحائط بمعدل 1 / 5 m/s . فجد معدل انزلاق الطرف العلوي عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والأرض = π / 6

$$\frac{dx}{dt} = 1/5 \text{ m/s} \quad ، \quad \frac{dy}{dt} = ?$$

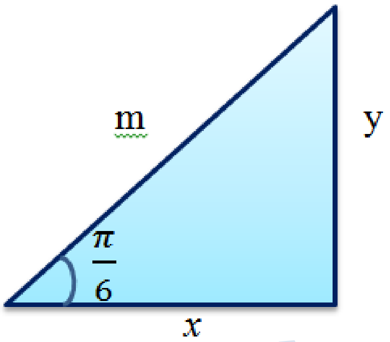
SOL

$$x^2 + y^2 = m^2$$

07802543623

$$\left[\, 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \,\right] \div 2$$

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$



$$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad x + \sqrt{3}\, y$$

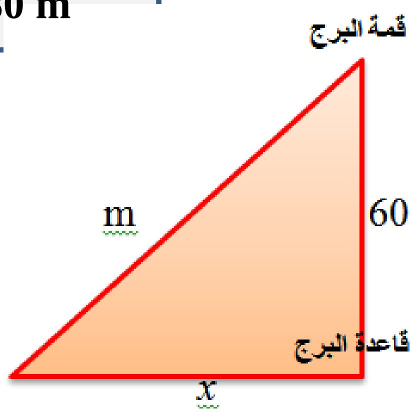
نعوض في (1)

$$\sqrt{3}\, y\frac{dx}{dt} + y\frac{dx}{dt} = 0 \qquad \div\, y \neq 0$$

$$\sqrt{3}\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow \sqrt{3}\,\frac{1}{5} + \frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-\sqrt{3}}{5}\ m/s$$

يسير رجل على دراجة هوائية و بسرعة مقدارها **7 m/s** متجها نحو قاعدة برج ارتفاعه **60 m** . اوجد معدل اقترابه من قمة البرج عندما يكون على بعد **80 m** من قاعدة البرج.

$$\frac{dx}{dt} = 7\ cm/s \ ، \ \frac{dm}{dt} = ? \ ، \ x = 80\ m$$



$$m^2 = x^2 + 3600$$

$$2m\frac{dm}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} \qquad \div 2$$

$$m\frac{dm}{dt} = x\frac{dx}{dt} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$m^2 = 6400 + 3600 = 10\,000$$

$$m = 100$$

نعوض في (1)

$$100\frac{dm}{dt} = 80\,(-7)$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{-560}{100} = -5.6\ m/s$$

EXA

طريقان متعامدان يلتقيان بنقطة (A) تحركت سيارتان من نقطة (A) كل منهما في طريق وكان معدل سرعة السيارة الاولى 80 Km / h ومعدل سرعة السيارة الثانية 60 Km / h . جد معدل الابتعاد بين السيارتين بعد ربع ساعة من بدأ الحركة من (A)

SOL

$\frac{dx}{dt} = 80Km/h$ ، $\frac{dy}{dt} = 60Km/h$ ، $t = \frac{1}{4}\,\mathbf{h}$ ، $\frac{dm}{dt}$

$$x^2 + y^2 = m^2$$

$$[\,2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2m\frac{dm}{dt} \quad \div 2$$

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = m\frac{dm}{dt} \quad .... (1)$$

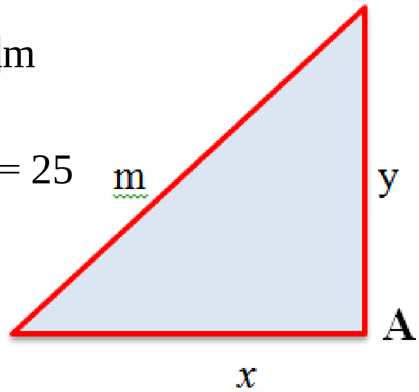
المسافة = السرعة × الزمن

$$x = \frac{dx}{dt} \times t = 80\left(\frac{1}{4}\right) = 20\ Km$$

$$y = \frac{dx}{dt} \times t = 60\left(\frac{1}{4}\right) = 15\ Km$$

$$x^2 + y^2 = m^2 \Rightarrow 400 + 225 = m^2$$

$$m^2 = 625 \Rightarrow m = 25$$



نعوض في (1)

$$20(80) + 15(60) = 25\frac{dm}{dt}$$

$$2500 = 25\frac{dm}{dt}$$

$$2500 = 25\frac{dm}{dt} \Rightarrow \frac{dm}{dt} = \frac{2500}{25} \Rightarrow \frac{dm}{dt} = 100\ Km/h$$

EXA

عمود طوله 7.2m في نهايته مصباح يتحرك شخص طوله 1.8m مبتعدا عن العمود وبسرعة 30 m/ min جد معدل تغير طول ظل الرجل ؟

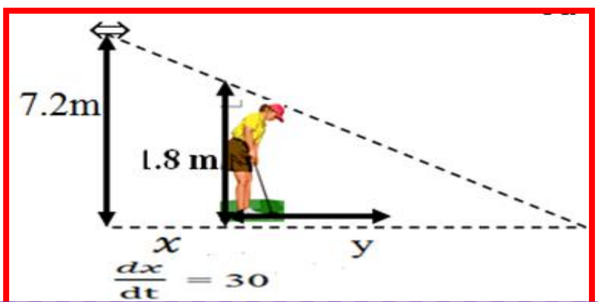
SOL

$\frac{dx}{dt} = 30m/m$ ، $\frac{dy}{dt} = ?$

من التشابه

$$\frac{y}{y+x} = \frac{1.8}{7.2} \Rightarrow 4y = y + x$$

$$4y - y = x \Rightarrow 3y = x$$



$$3\frac{dy}{dt}=\frac{dx}{dt} \Rightarrow 3\frac{dy}{dt}=30 \qquad \div 3$$

$$\frac{dy}{dt}=10 \text{ m / min}$$

EXA

لتكن M نقطة تتحرك على القطع المكافئ $y^2 = 4x$.
بحيث يكون المعدل الزمني لإبتعادها عن النقطة $(7\ ,0)$ يساوي (0.2 unit/s)
جد المعدل الزمني لتغير الإحداثي السيني للنقطة عندما يكون $x = 4$

SOL

$$S = MN = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$S = \sqrt{(x-7)^2 + (y-0)^2}$$

$$S = \sqrt{(x-7)^2 + (y-0)^2}$$

$$S = \sqrt{x^2 - 14x + 49 + y^2} \Rightarrow y^2 = 4x$$

$$S = \sqrt{x^2 - 14x + 49 + 4x}$$

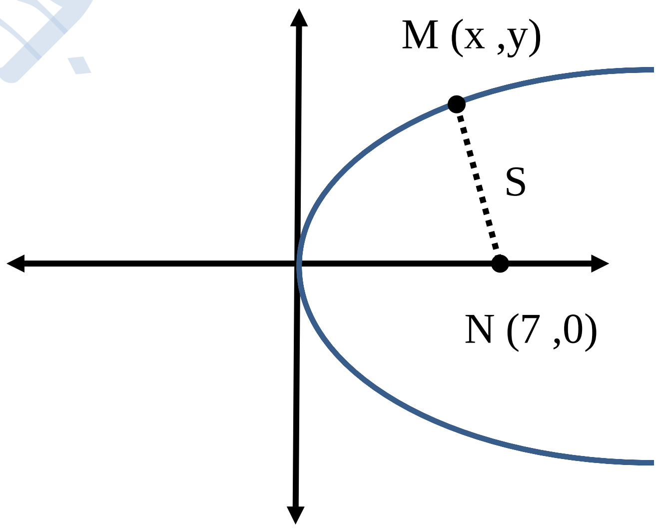
$$S = \sqrt{x^2 - 10x + 49}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2x\frac{dx}{dt} - 10\frac{dx}{dt}}{2\sqrt{x^2 - 10x + 49}} \Rightarrow 0.2 = \frac{2x - 10}{2\sqrt{x^2 - 10x + 49}}\frac{dx}{dt}$$

$$0.2 = \frac{2(4) - 10}{2\sqrt{16 - 40 + 49}}\frac{dx}{dt} \Rightarrow 0.2 = \frac{-2}{2\sqrt{25}}\frac{dx}{dt}$$

$$0.2 = \frac{-2}{10}\frac{dx}{dt}$$

$$2 = -2\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \text{-1 unit}$$



EXA

لتكن M نقطة تتحرك على القطع المكافئ $y = x^2$. جد احداثي النقطة M عندما يكون المعدل الزمني لابتعادها عن النقطة $(0 , \frac{3}{2})$ يساوي ثلثي المعدل الزمني لتغير الاحداثي الصادي للنقطة M

SOL

$$S = MN = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$S = \sqrt{(x - 0)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2}$$

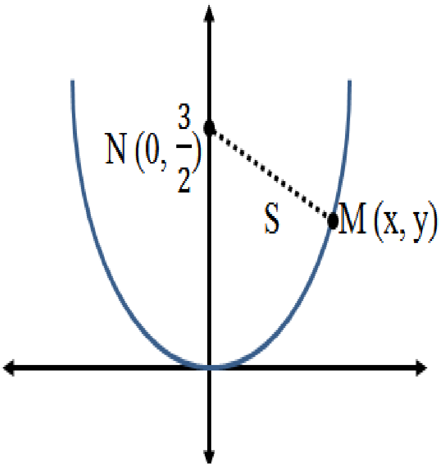
$$S = \sqrt{x^2 + y^2 - 3y + \frac{9}{4}} \Rightarrow y = x^2$$

$$S = \sqrt{y + y^2 - 3y + \frac{9}{4}} \Rightarrow S = \sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2y\frac{dy}{dt} - 2\frac{dy}{dt}}{2\sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}} = \frac{2(y-1)}{2\sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}}\,\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{dy}{dt} = \frac{y-1}{\sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}}\cdot\frac{dy}{dt} \qquad \div \frac{dy}{dt} \neq 0$$

$$\frac{2}{3} = \frac{y-1}{\sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}}$$



$$3y - 3 = 2\sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}$$

بتربيع الطرفين

$$9y^2 - 18y + 9 = 4\left(y^2 - 2y + \frac{9}{4}\right)$$

$$9y^2 - 18y + 9 = 4y^2 - 8y + 9$$

$$9y^2 - 18y - 4y^2 + 8y = 0$$

$$5y^2 - 10y = 0 \qquad \div 5$$

$$y^2 - 2y = 0$$

$$y(y - 2) = 0$$

either $y = 0$ يهمل

or $y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2$

بالتعويض $x^2 = y$

$$x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$(\sqrt{2}, 2) \quad , (-\sqrt{2}, 2)$$

جد النقطة التي تنتمي للدائرة $x^2+y^2+4x-8y=108$. والتي عندها يكون المعدل الزمني لتغير x يساوي المعدل الزمني لتغير y بالنسبة للزمن t

SOL

$$x^2+y^2+4x-8y=108 \quad ....(1)$$

$$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}+4\frac{dx}{dt}-8\frac{dy}{dt}=0 \qquad \div 2$$

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+2\frac{dx}{dt}-4\frac{dy}{dt}=0$$

وعند $\frac{dy}{dt}=\frac{dx}{dt}$

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dx}{dt}+2\frac{dx}{dt}-4\frac{dx}{dt}=0 \qquad \div \frac{dx}{dt}\neq 0$$

$$x+y+2-4=0$$

$$y=2-x \quad .... (2)$$

نعوض في (1)

$$x^2+(2-x)^2+4x-8(2-x)=108$$

$$x^2+4-4x+x^2+4x-16+8x-108=0$$

$$2x^2+8x-120=0 \qquad \div 2$$

$$x^2+4x-60=0$$

$$(x+10)(x-6)=0$$

either $\quad x+10=0 \Rightarrow x=-10$

بالتعويض في (2)

$$y=2-x \Rightarrow y=2-(-10) \Rightarrow y=12$$

$$(-10, 12)$$

or $\quad x-6=0 \Rightarrow x=6$

بالتعويض في (2)

$$y=2-x \Rightarrow y=2-6 \Rightarrow y=-4$$

$$(6, -4)$$

النقط $(-10, 12)$ ، $(6, -4)$

07802543623

مبرهنة رول

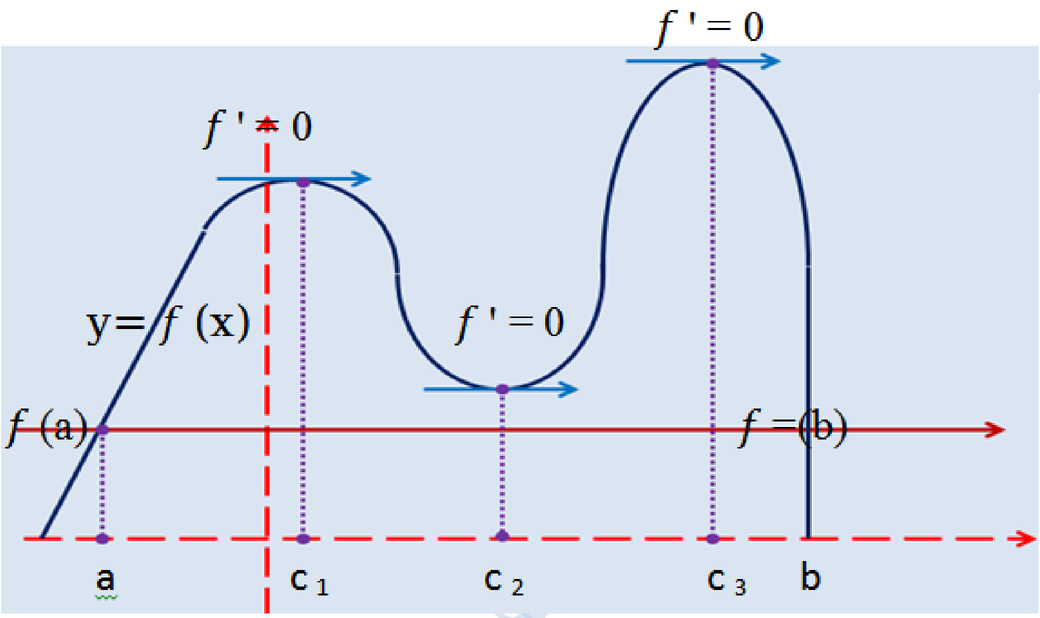
إذا كانت f دالة ::

[1] الدالة مستمرة في الفترة [a , b] .

[2] الدالة قابلة للاشتقاق في الفترة (a , b)

[3] $f(a) = f(b)$

فأنه يوجد على الأقل قيمة c تنتمي الى (a , b) وتحقق $f'(c) = 0$



Exam

بين هل أن مبرهنة رول تتحقق للدالة التالية . وجد قيمة c الممكنة

1

$$f(x) = (2-x)^2 \quad , x \in [0, 4]$$

SOL

[1] الدالة مستمرة على [0 ,4] لأنها كثيرة الحدود .

[2] الدالة قابلة للاشتقاق على (0 ,4) لأنها كثيرة الحدود .

[3] $f(0) = (2-0)^2 = (2)^2 = 4$

$f(4) = (2-4)^2 = (-2)^2 = 4$

$f(0) = f(4)$

∴ تحقق مبرهنة رول

$f'(x) = 2(2-x)(\text{-}1) = -2(2-x)$

$f'(c) = -2(2-c)$

$f'(c) = 0$ نجعل

$[\ 0 = -2(2-c)\ ] \div -2$

$0 = 2 - c \Rightarrow c = 2 \in (0, 4)$

❁❁❁❁❁❁❁❁❁❁❁❁❁❁❁❁❁❁❁❁❁❁❁

2 $f(x) = 9x + 3x^2 - x^3 \qquad [-1, 1]$

SOL

[1] الدالة مستمرة على [-1,1] لأنها كثيرة الحدود .

[2] الدالة قابلة للاشتقاق على (-1,1) لأنها كثيرة الحدود .

[3] $f(-1) = 9(-1) + 3(-1)^2 - (-1)^3$

$f(-1) = -9 + 3 + 1 = -5$

$f(1) = 9(1) + 3(1)^2 - (1)^3$

$f(-1) = 9 + 3 - 1 = 11$

$f(-1) \neq f(1)$

∴ لا تحقق مبرهنة رول للفترة من $[-1, 1]$

❁❁❁❁❁❁❁❁❁❁❁❁❁❁❁❁❁❁❁❁❁❁❁

3 $$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , x \in [-1, 2] \\ -1 & , x \in [-4, -1) \end{cases}$$

$$\underset{-4}{[}\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\underset{-1}{)[}\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\underset{2}{]}$$

SOL

مجال الدالة $[-4, 2]$

نبحث استمرارية الدالة عند $x = -1$

معرفة $f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2 \in R$

الغاية من اليمين

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} (x^2 + 1) = (-1)^2 + 1 = 2 = L_1$$

الغاية من اليسار

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} (-1) = -1 = L_2$$

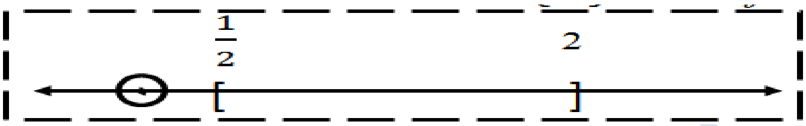
$L_1 \neq L_2$

الدالة ليست مستمرة في $[-4, 2]$ ∴ لا تحقق مبرهنة رول $[-4, 2]$

4 $f(x) = 2x + \frac{2}{x}$ $[\frac{1}{2}, 2]$

SOL

مجال الدالة $f = R - \{0\}$ ، $x = 0 \notin [\frac{1}{2}, 2]$



[1] ∴ الدالة مستمرة على $[\frac{1}{2}, 2]$

$$f'(x) = 2 + \frac{x(0) - 2(1)}{x^2} = 2 - \frac{2}{x^2}$$

[2] ∴ الدالة قابلة للاشتقاق على $(\frac{1}{2}, 2)$

[3] $$f\left(\frac{1}{2}\right) = (2)(\frac{1}{2}) + \frac{2}{\frac{1}{2}} = 1 + 4 = 5$$

$$f(2) = (2)(2) + \frac{2}{2} = 4 + 1 = 5$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f(2)$$

∴ تحقق مبرهنة رول

$$f'(c) = 2 - \frac{2}{c^2}$$

نجعل $f'(c) = 0$

$$2 - \frac{2}{c^2} = 0 \rightarrow 2 = \frac{2}{c^2} \rightarrow 2c^2 = 2 \rightarrow 2c^2 = 2$$

$$c^2 = 1 \rightarrow c = \pm 1$$

$$c = 1 \in (\frac{1}{2}, 2) \rightarrow c = -1 \notin (\frac{1}{2}, 2)$$

❁❁❁❁❁❁❁❁❁❁❁❁❁❁❁❁❁❁❁❁❁❁❁

5 $f(x) = K$ $[a, b]$

SOL

[1] الدالة مستمرة على $[a, b]$ لأنها دالة ثابتة

[2] الدالة قابلة للاشتقاق على (a, b) لأنها دالة ثابتة

[3] $f(a) = f(b) = K$

∴ تحقق مبرهنة رول وان قيمة c يمكن أن تكون أي قيمة ضمن الفترة (a, b)

6 $f(x) = \cos 2x + 2\cos x \qquad [0, 2\pi]$

SOL

[1] الدالة مستمرة على $[0, 2\pi]$

[2] الدالة قابلة للاشتقاق على $(0, 2\pi)$

[3]

$$f(0) = \cos 0 + 2\cos 0 = 1 + 2 = 3$$

$$f(2\pi) = \cos 4\pi + 2\cos 2\pi = 1 + 2 = 3$$

$$\because \; f(0) = f(2\pi)$$

∴ تحقق مبرهنة رول

$$f'(x) = -\sin 2x\,(2) - 2(-\sin x)$$

$$f'(x) = -\sin 2x - 2\sin x$$

$$f'(c) = -2\sin 2c - 2\sin c$$

$$-2\sin 2c - 2\sin c = 0 \qquad \div -2$$

$$\sin 2c + \sin c = 0$$

$$2\sin c\cos c + \sin c = 0$$

$$\sin c\,(2\cos c + 1) = 0$$

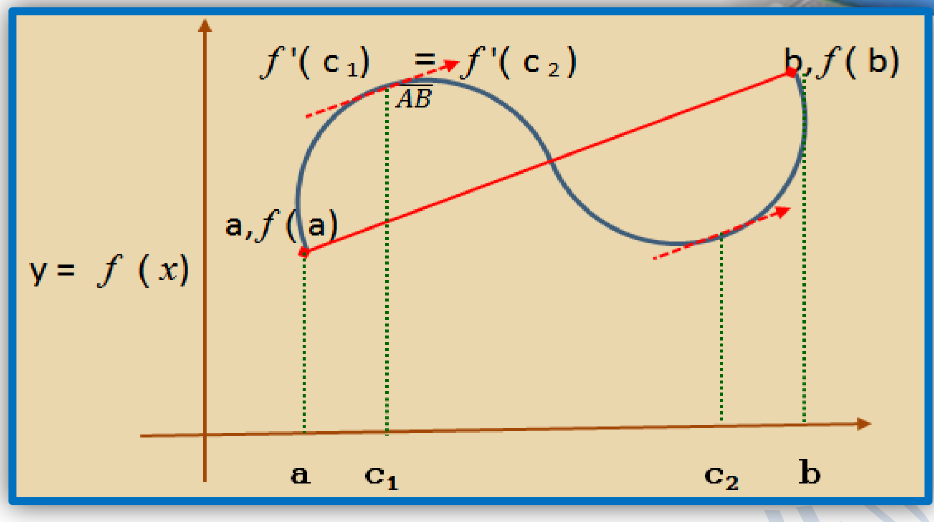
either $\because \sin c = 0 \Rightarrow c = 0 \notin \qquad \pi \in \qquad 2\pi \notin$

OR $\quad 2\cos c + 1 = 0 \qquad \cos c = -1/2$

$$c = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \in (0, 2\pi)$$

$$c = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \in (0, 2\pi)$$

مبرهنة القيمة المتوسطة



[1] اذا كانت f دالة مستمرة على الفترة المغلقة $[a, b]$

[2] قابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة (a, b)

فأنه يوجد على الأقل قيمة واحدة c تنتمي الى (a, b)

وتحقق
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

او
$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

ميل الوتر المار بالنقطتين A, B يساوي $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

ميل المماس للمنحني عند c = المشتقة الاولى عند c = $f'(c)$

∵ المماس والوتر متوازيان فيكون ميلهما متساويان $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

ملاحظة

أن مبرهنة رول هي حالة خاصة من مبرهنة القيمة المتوسطة ففي مبرهنة رول يجب توافر شرط ثالث هو $f(a) = f(b)$

أي ان الوتر والمماس يوازيان محور السينات .

اي فرق الصادات $= 0$ لذا يصبح الميل $= 0$

فنحصل على $f'(c) = 0$

Exam

بين ان الدوال الآتية تحقق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة واوجد قيم C

1 $f(x) = x^2 - 6x + 4 \qquad [-1, 7]$

SOL

[1] الدالة مستمرة على الفترة [-1 , 7] لأنها كثيرة الحدود

[2] الدالة قابلة للاشتقاق على (-1 , 7) لأنها كثيرة الحدود

ميل المماس ::

$f'(x) = 2x - 6$

$f'(c) = 2c - 6$

ميل الوتر

$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(7) - f(-1)}{7 + 1}$

$f(7) = (7)^2 - 6(7) + 4 = 49 - 42 + 4 = 11$

$f(-1) = (-1)^2 - 6(-1) + 4 = 1 + 6 + 4 = 11$

$\frac{11 - 11}{8} = 0$

ميل المماس = ميل الوتر

$2c - 6 = 0 \rightarrow 2c = 6 \rightarrow c = 3 \in (-1, 7)$

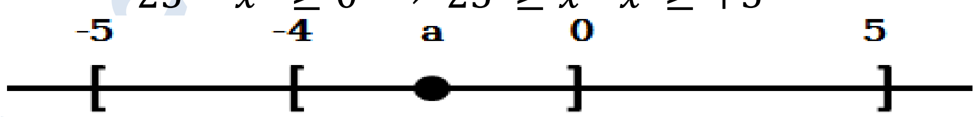
2 $f(x) = \sqrt{25 - x^2} \qquad [-4, 0]$

SOL

مجال f = [-5 , 5]

$25 - x^2 \geq 0 \rightarrow 25 \geq x^2 \rightarrow x \geq \pm 5$

$25 - x^2 \geq 0 \rightarrow 25 \geq x^2 \quad x \geq +5$



[1] نبحث الاستمرارية في [- 4 , 0]

[a] **تثبت الاستمرارية في الفترة المفتوحة** (- 4 , 0)

$\forall a \in (-4, 0)$

$f(a) = \sqrt{25 - a^2} \in R$ معرفة

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

∴ مستمرة في (- 4 , 0)

[b] **عند** $x = -4$

$$\lim_{x \to -4} f(x) = \lim_{x \to -4} (\sqrt{25-x^2}) = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3 = f(-4)$$

[c] عند $x = 0$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (\sqrt{25-x^2}) = \sqrt{25-0} = \sqrt{25} = 5 = f(0)$$

∴ الدالة مستمرة في [- 4 , 0]

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$$

مجال المشتقة

$$\sqrt{25-x^2} > 0 \rightarrow 25 - x^2 > 0 \rightarrow 25 > x^2 \rightarrow x < \pm 5$$

مجال المشتقة (- 5 , 5)

∴ الدالة f قابلة للاشتقاق مستمرة في (- 4 , 0) لأنها ضمن مجال المشتقة .

ميل المماس

$$f(c) = \frac{-c}{\sqrt{25-c^2}}$$

ميل الوتـــر

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(0)-f(-4)}{0+4} = \frac{\sqrt{25-0} - \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5-3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

ميل الوتـــر = ميل المماس

$$\frac{-c}{\sqrt{25-c^2}} = \frac{1}{2} \rightarrow -2c = \sqrt{25-c^2}$$

بتربيع الطرفين

$$4c^2 = 25 - c^2 \rightarrow 5c^2 = 25 \rightarrow c^2 = 5$$

$c = \pm\sqrt{5} \rightarrow$

$c = -\sqrt{5} \in (-4, 0)$

$c = \sqrt{5} \notin (-4, 0)$

3

$$f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} \qquad [-2, 7]$$

$$= (x+1)^{\frac{2}{3}}$$

SOL

مجال الدالة f = R

[1] ∴ الدالة مستمرة في [-2, 7]

[2] قابلة للاشتقاق

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{-1}{3}} = \frac{2}{3(x+1)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$$

مجال المشتقة = R / { -1}　　$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \in (-2, 7)$

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق

∴ لا تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة في $[-2\ ,\ 7]$

Exam

إذا كانت $f(x) = x^3 - 4x^2$ ، $f : [0, b] \to R$

وكانت تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة عند $c = \frac{2}{3}$ فجد قيمة **b** ؟

SOL

$$f(x) = x^3 - 4x^2$$

ميل المماس $f'(x) = 3x^2 - 8x \implies f'(c) = 3c^2 - 8c$

عند $c = \frac{2}{3}$

$$f'\left(\frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{4}{9}\right) - 8\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3} - \frac{16}{3} = \frac{-12}{3} = -4$$

ميل الوتر

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(b) - f(0)}{b - 0} = \frac{b^3 - 4b^2 - 0}{b} = \frac{b(b^2 - 4b)}{b} = b^2 - 4b$$

ميل المماس = ميل الوتر

$$b^2 - 4b = -4$$

$$b^2 - 4b + 4 = 0$$
$$(b - 2)^2 = 0$$
$$b - 2 = 0$$
$$b = 2$$

نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة

اذا كانت f دالة مستمرة ومعرفة على $[a, b]$ وقابلة للاشتقاق في (a, b) .

ولو اعتبرنا أن $b - a = h$

فأن $b = a + h$ حيث $h \in R$ $h \neq 0$

فإنه بموجب مبرهنة القيمة المتوسطة

$$f'(c) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \Rightarrow \boxed{f(a+h) = f(a) + h\,f'(c)}$$

وعند ما يكون اقتراب b من a قربا كافيا تكون h صغيرة ويصبح الوتر صغير جدا فيكون

$$\boxed{f(a+h) \cong f(a) + h\,f'(a)}$$

ويقال للمقدار $h\,f'(a)$ التغير التقريبي للدالة

Exam

باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة تقريباً مناسبا للعدد $\sqrt{26}$

SOL

$a = 25$ $b = 26$ $h = b - a$ $h = 26 - 25 = 1$

$\sqrt{26} \Rightarrow f(x) = \sqrt{x}$

$$f(a+h) \cong f(a) + h\,f'(a)$$

$$f(26) \cong f(25) + (1)\,f'(25)$$

$$f(25) = \sqrt{25} = 5$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad f'(25) = \frac{1}{2\sqrt{25}} = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$f(26) \cong 5 + (1)(0.1) \cong 5 + 0.1 = 5.1$$

07802543623

Exam

اذا كان $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ فجد بصورة تقريبية $f(1.001)$

SOL

$a = 1$, $b = 1.001$ $\quad h = b - a \quad h = 1.001 - 1 = 0.001$

$$f(a+h) \cong f(a) + h\,f'(a)$$

$$f(1.001) \cong f(1) + (0.001)\,f'(1)$$

$$f(1) = (1)^3 + 3(1)^2 + 4(1) + 5 = 1 + 3 + 4 + 5 = 13$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + 4$$

$$f'(x) = 3(1)^2 + 6(1) + 4 = 3 + 6 + 4 = 13$$

$$f(1.001) \cong 13 + (0.001)(13) \cong 13 + 0.0013 \cong 13.013$$

Exam

باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة جد وبصورة تقريبية مقربا لثلاث مراتب عشرية

SOL

1) $\sqrt[5]{(0.98)^3} + (0.98)^4 + 3$

$a = 1 \quad b = 0.98 \quad h = b - a \quad h = 0.98 - 1 = -0.02$

$$f(x) = \sqrt[5]{x^3} + x^4 + 3 = x^{\frac{3}{5}} + x^4 + 3$$

$$f(a+h) \cong f(a) + h\,f'(a)$$

$$f(0.98) \cong f(1) + (-0.02)\,f'(1)$$

$$f(x) = (1)^{\frac{3}{5}} + (1)^4 + 3 = 1+1+3 = 5$$

$$f'(x) = \frac{3}{5}(x)^{\frac{-2}{5}} + 4(x)^3 = \frac{3}{5}(1)^{\frac{-2}{5}} + 4(1)^3$$

$$= \frac{3}{5} + 4 = \frac{23}{5} = 4.6$$

$$f(0.98) \cong 5 + (-0.02)(4.6) \cong 5 - 0.092 \cong 4.908$$

Exam

2 $\sqrt{17} + \sqrt[4]{17}$

SOL

a = 16 b = 17 h = b - a h = 17 **-16 = 1**

$$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}}$$

$$f(a+h) \cong f(a) + h\,f'(a)$$

$$f(17) \cong f(16) + (1)\,f'(16)$$

$$f(16) = \sqrt{16} + \sqrt[4]{16} = 4 + 2 = 6$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{4x^{\frac{3}{4}}}$$

$$f'(16) = \frac{1}{2(4^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{4(2^4)^{\frac{3}{4}}}$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{32} = \frac{4+1}{32} = \frac{5}{32} = 0.156$$

$$f(17) \cong 6 + (1)(0.156) \cong 6.156$$

Exam

3 $\sqrt[3]{7.8}$

SOL

a = 8 b = 7. 8 h = b - a h = 7. 8 **- 8 = - 0.2**

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

$$f(a+h) \cong f(a) + h\,f'(a)$$

$$f(7.8) \cong f(8) + (-0.2)\,f'(8)$$

$$f(8) = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$f'(8) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}(8)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}(2^3)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{1}{12}$$

$$= 0.083$$

$$f(7.8) \cong 2 + (-0.2)(0.083) \cong 2 - 0.0166 \cong 1.9834$$

Exam

4 SOL

$$\sqrt[3]{0.12}$$

a = 0.125 b = 0.120 h = b - a h = 0.120 - 0.125 = **- 0.005**

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

$$f(a+h) \cong f(a) + h\,f'(a)$$

$$f(0.12) \cong f(0.125) + (-0.005)\,f'(0.125)$$

$$f(8) = \sqrt[3]{0.125} = 0.5$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$f'(0.125) = \frac{1}{3}\,[(0.5)^3]^{-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(0.5)^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{0.25} = \frac{100}{0.75} = \frac{4}{3} = 1.333$$

$$f(0.12) \cong 0.5 + (-0.005)(1.333)$$

$$\cong 0.5 - 0.006665 \cong 0.493335$$

Exam

5 SOL

$$\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$$

a = 8 b = 9 h = b - a h = 9 - **8** = **1**

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{\frac{-1}{3}}$$

$$f(a+h) \cong f(a) + h\,f'(a)$$

$$f(9) \cong f(8) + (1)\,f'(8)$$

$$f(8) = (8)^{-\frac{1}{3}} = (2^3)^{-\frac{1}{3}} = (2)^{-1} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$f'(x) = \frac{-1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$$

$$f'(8) = \frac{-1}{3}\,(2^3)^{-\frac{4}{3}} = \frac{-1}{3} \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{-1}{3} \cdot \frac{1}{16} = \frac{-1}{48} = -0.02$$

$$f(9) \cong 0.5 + (1)(0.02) \cong 0.050 - 0.02 \cong 0.48$$

Exam

SOL 6

$$\frac{1}{101}$$

a = 100   b = 101   h = b - a   h = 101 -100 = **1**

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$f(a+h) \cong f(a) + h\,f'(a)$$

$$f(101) \cong f(100) + (1)\,f'(100)$$

$$f(100) = \frac{1}{100} = 0.01$$

$$f'(x) = x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$

$$f'(100) = \frac{1}{(100)^4} = \frac{1}{10000} = 0.0001$$

$$f(101) \cong 0.01 + (1)(0.0001) \cong 0.01 - 0.0001 \cong 0.0099$$

Exam

اذا كانت $f(x) = \sqrt[5]{31x+1}$ جد باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة القيمة التقريبية الى $f(1.01)$

SOL

a = 1   b = 1.01   h = b - a   h = 1.01 - 1 = **0.01**

$$f(x) = \sqrt[5]{31x+1} = (31x+1)^{\frac{1}{5}}$$

$$f(a+h) \cong f(a) + h\,f'(a)$$

$$f(1.01) \cong f(1) + (0.01)\,f'(1)$$

$$f(1) = \sqrt[5]{31(1)+1} = \sqrt[5]{32} = 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{5}(31x+1)^{-\frac{4}{5}}(31) = \frac{31}{5}(31x+1)^{-\frac{4}{5}}$$

$$f'(1) = \frac{31}{5}(31(1)+1)^{-\frac{4}{5}} = \frac{31}{5}(32)^{-\frac{4}{5}}$$

$$= \frac{31}{5}(2^5)^{\frac{-4}{5}} = \frac{31}{5}\;\frac{1}{2^4} = \frac{31}{5}\;\frac{1}{16} = \frac{31}{80} = 0.38$$

$$f(1.01) \cong 2 + (0.01)(0.38)$$

$$\cong 2 + 0.0038 \cong 2.0038$$

Exam

مكعب طول حرفه (9.98 cm) جد حجمه بصورة تقريبية باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة .

SOL

a = 10　b = 9.98　h = b - a　h = 9.98 – 10 **= - 0.02**

$$V = x^3$$

$$V(a+h) \cong V(a) + h\,V'(a)$$

$$V(9.98) \cong V(10) + (-0.02)\,V'(10)$$

$$V(10) = (10)^3 = 1000$$

$$V'(x) = 3x^2$$

$$V'(10) = 3(10)^2 = 300$$

$$V(9.98) \cong 1000 + (-0.02)(300)$$

$$\cong 1000 - 6 \cong 994\ cm^3$$

Exam

كرة حجمها $84\pi\ cm^3$ جد نصف قطرها بصورة تقريبية باستخدام القيمة المتوسطة.

SOL

a = 64　b = 63　h = b - a　h = 63 - 64 **= - 1**

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\left[\ 84\pi = \frac{4}{3}\pi r^3\ \right] \times \frac{3}{4}$$

$$63 = r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{63}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

$$f(a+h) \cong f(a) + h\,f'(a)$$

$$f(63) \cong f(64) + (-1)\,f'(64)$$

$$f(64) = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$f'(64) = \frac{1}{3}(4^3)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{4^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{16} = \frac{1}{48} = 0.02$$

$$f(a+h) \cong 4 + (-1)(0.02) \approx 4.00 - 0.02 \approx 3.98\ cm$$

Exam

مخروط دائري قائم ارتفاعه يساوي قطر قاعدته . فإذا كان ارتفاعه يساوي 2.98cm فجد حجمه بصورة تقريبية باستخدام القيمة المتوسطة أو نتيجتها .

SOL

$a = 3 \quad b = 2.98 \quad h = b - a \quad h = 2.98 - 3 = \mathbf{-0.02}$

$h = 2r \Rightarrow r = \frac{1}{2} h$

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

$$V = \frac{\pi}{3} \left(\frac{1}{2} h\right)^2 h = \frac{\pi}{12} h^3$$

$$V(a+h) \cong V(a) + h\,V'(a)$$

$$V(2.98) \cong V(3) + (-0.02)\,V'(3)$$

$$V(3) = \frac{1}{12}\pi(3)^3 = \frac{1}{12}\pi\, 27 = \frac{\pi}{12}(27) = \frac{9\pi}{4}$$

$$V'(h) = \frac{1}{4}\pi h^2 \Rightarrow V'(3) = \frac{1}{4}\pi(3)^2 = \frac{9\pi}{4}$$

$$V(2.98) \cong \frac{9\pi}{4} + (-0.02)\frac{9\pi}{4}$$

$$V(2.98) \cong \frac{9\pi}{4} - \frac{0.18\pi}{4} \cong \frac{8.82\pi}{4}$$

$$V(2.98) \cong 2.205\,\pi$$

مقدار التغير التقريبي

يقال للمقدار $h\,f'(a)$ التغير التقريبي للدالة

Exam

لتكن $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ فإذا تغيرت x من 8 الى 8.06 فما مقدار التغير التقريبي للدالة

SOL

a = 8 , b = 8.06 , h = b - a , h = 8.06 -8 = **0.06**

$f(x)=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$ $\qquad f\,[8\,,8.06]\to R$

مقدار التغير التقريبي $\cong\ h\,f'(a)$

$\cong\ (8.06)\,f'(8)$

$f'(x)=\frac{2}{3}\,x^{-\frac{1}{3}}$

$f'(8)=\frac{2}{3}\,(2^3)^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\,(2)^{-1}=\frac{2}{3(2)}=\frac{1}{3}=0.333$

$h\ f'(a)\cong(0.06)(0.333)\cong 0.01998$

Exam

يراد طلاء مكعب طول ضلعه 10 cm فإذا كان سمك الطلاء 0.15 cm .
أوجد حجم الطلاء بصورة تقريبية وباستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة

SOL

a = 10 , b = 10.3 , h = b - a , h = 10.3 -10 = **0.3**

$V=x^3$

حجم الطلاء $\cong\ h\,V'(a)$

$\cong\ (0.3)\,V'(10)$

$V'(x)=3x^2$

$V'(10)=3\,(10)^2=300$

حجم الطلاء $\cong(0.03)(300)\cong 90\ cm^3$

اختبار التزايد والتناقص للدالة باستخدام المشتقة الأولى

نتيجة

من النتائج المهمة لمبرهنة القيمة المتوسطة هي النتيجة التالية

لتكن f مستمرة في الفترة المغلقة $[a, b]$ وقابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة (a, b)

فاذا كانت

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow f \text{ متزايدة}$$

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow f \text{ متناقصة}$$

Exa

جد مناطق التزايد والتناقص لكل من الدوال التالية :

1 $y = f(x) = x^2$

SOL

$y' = f'(x) = 2x$

نجعل $f'(x) = 0$

$2x = 0 \Rightarrow x = 0$

- - - - - - - -	0	+ + + + + + +	$f'(x)$

مناطق تزايد $\{ x : x > 0 \}$

مناطق التناقص $\{ x : x < 0 \}$

2 $f(x) = 9x + 3x^2 - x^3$

SOL

$f'(x) = 9 + 6x - 3x^2$

$9 + 6x - 3x^2 = 0 \qquad \div 3$

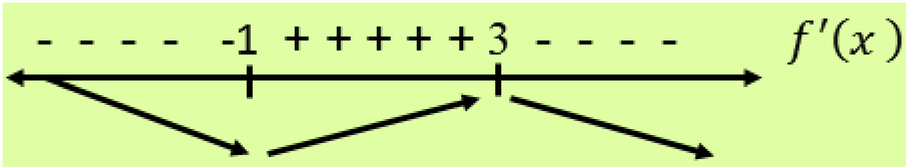
$3 + 2x - x^2 = 0$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x - 3)(x + 1) = 0$

either $(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 3$

or $(x + 1) = 0 \Rightarrow x = -1$



مناطق التزايد   الفترة $(-1\ ,\ 3)$

مناطق التناقص $\{x : x > 3\}$ ، $\{x : x < -1\}$

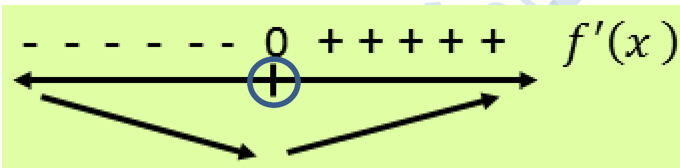
3    $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

SOL

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}\ x^{\frac{-1}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x}}$$

$\because$ $f'(x)$ غير معرفة عندما $x = 0$



مناطق تزايد $\{x : x > 0\}$

مناطق التناقص $\{x : x < 0\}$

النهاية العظمى والصغرى المحلية

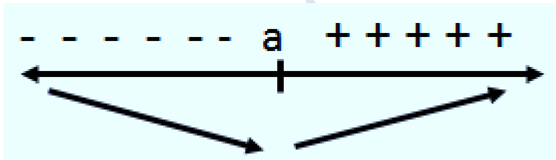
لكي نختبر القيمة العظمى والصغرى المحلية للدالة f بواسطة المشتقة الاولى

للدالة f نتبع الخطوات التالية :

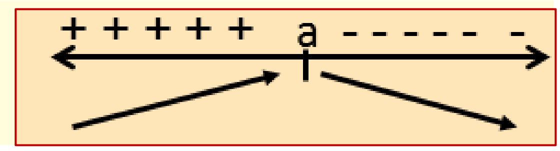
1. نأخذ المشتقة $f'(x)$
2. نجد قيم x وذلك بجعل $f'(x) = 0$
3. نعوض قيم (x) في الدالة لنجد النقطة الحرجة (a , b)
4. نختبر اشارة $f'(x)$ على خط الاعداد بجوار قيم (x)

فاذا كانت

اشارة $f'(x)$

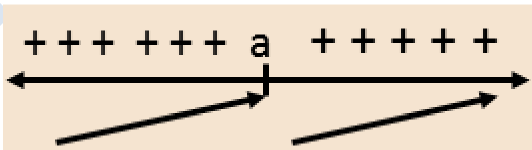


النقطة نهاية صغرى

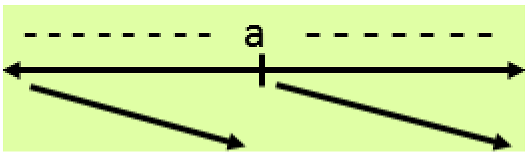


النقطة نهاية عظمى

اشارة $f'(x)$



نقطة حرجة .



نقطة حرجة

Exa

جد نقطة النهايات العظمى والصغرى المحلية للدوال الآتية :

1) $$f(x) = 1 + (x-2)^2$$

SOL

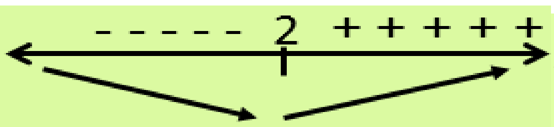
$$f(x) = 1 + (x-2)^2$$
$$f'(x) = 2(x-2)(1) = 2(x-2)$$

نجعل $f'(x) = 0$

$$2(x-2) = 0 \qquad \div 2$$
$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$
$$f(x) = 1 + (2-2)^2 = 1 + (0)^2 = 1$$

النقطة $(2 , 1)$ نقطة حرجة

اشارة $f'(x)$



07802543623

مناطق تزايد $\{x : x > 2\}$

مناطق التناقص $\{x : x < 2\}$

النقطة $(2 , 1)$ نقطة نهاية صغرى محلية .

2 **SOL**

$$f(x) = 1 - (x-2)^2$$

$$f(x) = 1 - (x-2)^2$$
$$f'(x) = -2(x-2)$$

نجعل $f'(x) = 0$

$$-2(x-2) = 0 \qquad \div 2$$
$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$
$$f(x) = 1 - (2-2)^2 = 1 - 0 = 1$$

النقطة $(2 , 1)$ نقطة حرجة

اشارة $f'(x)$: $+ + + + +$ 2 $- - - - - - -$

مناطق تزايد $\{x : x < 2\}$

مناطق التناقص $\{x : x > 2\}$

النقطة $(2 , 1)$ نقطة نهاية عظمى محلية .

3 **SOL**

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$$

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$$
$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$$

نجعل $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 18x + 24 = 0 \qquad \div 3$$
$$x^2 - 6x + 8 = 0$$
$$(x-2)(x-4) = 0$$

either $(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2$

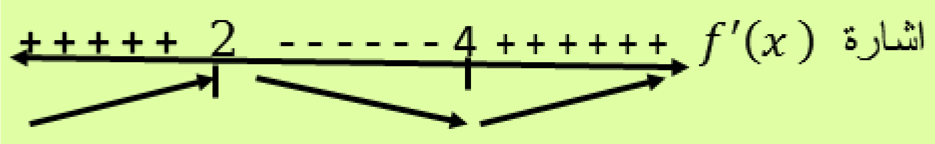
$$f(2) = (2)^3 - 9(2)^2 + 24(2) = 8 - 36 + 48 = 20$$

$(2 , 20)$ نقطة حرجة

or $(x-4) = 0 \Rightarrow x = 4$

$$f(4) = (4)^3 - 9(4)^2 + 24(4) = 64 - 144 + 96 = 16$$

$(4 , 16)$ نقطة حرجة



مناطق تزايد $\{x : x > 4\}$ ، $\{x : x < 2\}$

مناطق التناقص الفترة $(2, 4)$

النقطة $(2, 20)$ نقطة نهاية عظمى محلية .

النقطة $(4, 16)$ نقطة نهاية صغرى محلية .

4 $f(x) = x^3 \ (x - 4)$

SOL

$$f(x) = x^3 \ (x - 4) = x^4 - 4x^3$$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2$$

نجعل $f'(x) = 0$

$\div 4$ $\quad 4x^3 - 12x^2 = 0$

$$x^3 - 3x^2 = 0$$

$$x^2 (x - 3) = 0$$

either $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

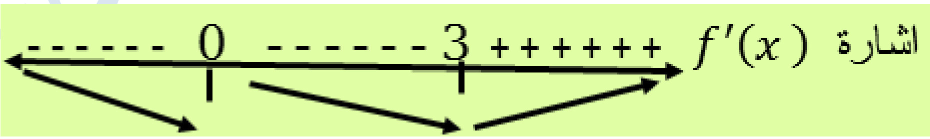
$$f(0) = (0)^3 \ (0 - 4) = 0$$

$(0, 0)$ نقطة حرجة

or $(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 3$

$$f(3) = (3)^3 \ (3 - 4) = 27(-1) = -27$$

$(3, -27)$ نقطة حرجة



مناطق تزايد $\{x : x > 3\}$

مناطق التناقص $\{x : x < 0\}$ الفترة $(0, 3)$

النقطة $(0, 0)$ نقطة حرجة .

النقطة $(3, -27)$ نقطة نهاية صغرى محلية .

5 $$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

SOL

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$
$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

نجعل $f'(x) = 0$

$\div 4$

$$4x^3 - 4x^2 = 0$$
$$x^3 - x^2 = 0$$
$$x(x^2 - 1) = 0$$

either $x = 0$

$$f(0) = (0)^4 - 2(0)^2 + 1 = 1$$

نقطة حرجة $(0, 1)$

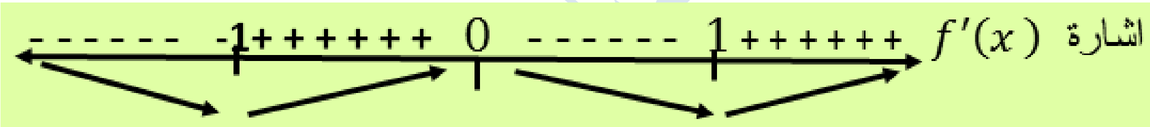
or $(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$$f(1) = (1)^4 - 2(1)^2 + 1 = 0$$

نقطة حرجة $(1, 0)$

$$f(-1) = (-1)^4 - 2(-1)^2 + 1 = 0$$

نقطة حرجة $(-1, 0)$



مناطق تزايد $\{x : x > 1\}$ الفترة $(-1, 0)$

مناطق التناقص $\{x : x < -1\}$ الفترة $(0, 1)$

النقطة $(-1, 0)$ نقطة نهاية صغرى محلية .

النقطة $(0, 1)$ نقطة نهاية عظمى محلية .

النقطة $(1, 0)$ نقطة نهاية صغرى محلية .

6 $$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$$

SOL

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)(2x) - x^2(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3)}{(x^2+1)^2}$$

نجعل $f'(x) = 0$

$$= \frac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$f(0) = \frac{0}{0+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad (0\,,0) \text{ نقطة حرجة}$$

اشارة $f'(x)$ $- - - - - -\; 0 \;+ + + + + + +$

مناطق تزايد $\{x : x > 0\}$

مناطق التناقص $\{x : x < 0\}$

النقطة $(0\,,0)$ نقطة نهاية صغرى محلية .

7

$$f(x) = x^2 + \frac{2}{x} \quad ، x \neq 0$$

SOL

$$f(x) = x^2 + \frac{2}{x} = x^2 + 2x^{-1}$$

$$f'(x) = 2x - 2x^{-2} = 2x - \frac{2}{x^2}$$

نجعل $f'(x) = 0$

$$2x - \frac{2}{x^2} = 0 \qquad \times\ x^2$$

$$2x^3 - 2 = 0 \qquad \div\ 2$$

$$x^3 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

$$f(1) = (1)^2 + \frac{2}{1} = 2 + 1 = 3$$

$(1\,,3)$ نقطة حرجة

اشارة $f'(x)$ $- - - - - -\; 0 \;- - - - -\; 1 \;+ + + + + + +$

مناطق تزايد $\{x : x > 1\}$

مناطق التناقص $\{x : x < 1\}$

النقطة $(1\,,3)$ نقطة نهاية صغرى محلية .

8 $f(x) = x^3 + x$

SOL

$f(x) = x^3 + x$

$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$

∴ لا توجد نهايات والدالة متزايدة $\forall x \in R$

9 $f(x) = 2 - 5x$

SOL

$f(x) = 2 - 5x$

$f'(x) = -5 < 0$

∴ لا توجد نهايات والدالة متناقصة $\forall x \in R$

10 $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$ ، $x \neq 2$

SOL

$$f(x) = \frac{x}{x-2}$$

$$f'(x) = \frac{(x-2)(1)-x(1)}{(x-2)^2} = \frac{x-2-x}{(x-2)^2} = \frac{-2}{(x-2)^2}$$

نجعل $f'(x) = 0$

$$\frac{-2}{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow -2 \neq 0$$

∴ لا توجد نهايات

اشارة $f'(x)$: $- - - - - - -$ 2 $- - - - - -$

مناطق التناقص $\{x : x < 2\}$ ، $\{x : x > 2\}$

تقعر وتحدب المنحنيات ونقط للانقلاب

اذا كانت دالة f قابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة (a , b) فيقال عن الدالة f بانها محدبة . اذا كانت متناقصة خلال الفترة تسمى مقعرة اذا كانت f متزايدة خلال الفترة .

ملاحظة

المنحني مقعر في (a , b) ⟺ المنحني يقع فوق جميع مماساته (a , b) .

المنحني محدب في (a , b) ⟺ المنحني يقع تحت جميع مماساته (a , b) .

مبرهنة

اذا كانت f معرفة في [a , b] ولها مشتقة اولى وثانية (a , b) على فانها تكون مقعرة على (a , b) اذا حققت الشرط الآتي

$f''(x) > 0$ لكل $x \in (a, b)$

وتكون محدبة على (a , b) اذا حققت الشرط الآتي

$f''(x) < 0$ لكل $x \in (a, b)$

EXA

ادرس تقعر وتحدب كل من الدوال

1) $f(x) = x^3$

SOL

$$f(x) = x^3$$
$$f'(x) = 3x^2$$
$$f''(x) = 6x$$

نجعل $f''x = 0$

$6x = 0 \qquad \div 6$

$x = 0$

اشارة - $f''x$

- - - - - - - - 0 + + + + + +

تحدب   تقعر

مناطق التقعر $\{x : x > 0\}$

مناطق التحدب $\{x : x < 0\}$

2) $f(x) = x^2$

SOL

$$f(x) = x^2$$
$$f'(x) = 2x$$
$$f''(x) = 2 > 0$$

$\therefore$ الدالة مقعرة $\forall x \in R$

نقطة الانقلاب

هي نقطة تنتمي لمنحني دالة والتي يتغير عندها منحني الدالة (**من تقعر الى تحدب**) او بالعكس (**من تحدب الى تقعر**)

قاعـــــــــدة

1- نجد قيم x بجعل $f''(x) = 0$.

2- نعوض قيم x بالدالة الأصلية لنجد قيم y فتكون (x , y) نقطة مرشحة .

3- ندرس اشارة $f''(x)$ ونحدد نوع النقطة .

$f''(x)$ نقطة انقلاب

- $+ + + + + +$ a $- - - - - - -$: تقعر | تحدب
- $- - - - - - -$ a $+ + + + + +$: تحدب | تقعر

$f''(x)$ نقطة مرشحة

- $- - - - - -$ a $- - - - - -$: تحدب | تحدب
- $+ + + + + +$ a $+ + + + + +$: تقعر | تقعر

EXA

جد مناطق التقعر والتحدب ونقطة الانقلاب ان وجدت للدوال الآتية

1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$

SOL

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$$
$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$
$$f''(x) = 12x - 6$$

نجعل $f''(x) = 0$

$$12x - 6 = 0 \qquad \div 12$$

$$x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 12\left(\frac{1}{2}\right) + 1$$

$$= 2\left(\frac{1}{8}\right) - 3\left(\frac{1}{4}\right) - 6 + 1$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - 5 = \frac{-2}{4} - 5 = \frac{-1}{2} - 5 = \frac{-11}{2}$$

نقطة مرشحة $\left(\frac{1}{2} ، \frac{-11}{2}\right)$

اشارة $f''x$

- - - - - -	$\frac{1}{2}$	+ + + + +
تحدب		تقعر

مناطق التقعر $\{x : x > \frac{1}{2}\}$ ،، مناطق التحدب $\{x : x < \frac{1}{2}\}$

نقطة انقلاب $\left(\frac{1}{2} ، \frac{-11}{2}\right)$

② $f(x) = 4x^3 - x^4$

SOL

$$f(x) = 4x^3 - x^4$$
$$f'(x) = 12x^2 - 4x^3$$
$$f''(x) = 24x - 12x^2$$

نجعل $f''(x) = 0$

$$24x - 12x^2 = 0 \qquad \div 12$$

$$2x - x^2 = 0 \Rightarrow x(2 - x)$$

either $x = 0$

$$f(0) = 0$$

نقطة مرشحة $(0 ، 0)$

Or $2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$

$$f(2) = 4(2)^3 - (2)^4 = 32 - 16 = 16$$

نقطة مرشحة $(2 ، 16)$

اشارة $f''x$

- - - - - -	0	+ + + + +	2	- - - - - -
تحدب		تقعر		تحدب

مناطق التقعر الفترة $(0 ، 2)$

مناطق التحدب $\{x : x > 2\}$ ، $\{x : x < 0\}$

نقطتا انقلاب $(0 , 0)$ ، $(2 , 16)$

③ $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

SOL

$$f(x) = x + \frac{1}{x} = x + x^{-1}$$

$$f'(x) = 1 - x^{-2}$$

$$f''(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

نجعل $f''(x) = 0$

$$\frac{2}{x^3} = 0 \Rightarrow 2 \neq 0$$

∴ لا توجد نقط انقلاب

اشارة $f''x$: - - - - - - - 0 + + + + + +
تحدب | تقعر

مناطق التقعر $\{x : x > 0\}$

مناطق التحدب $\{x : x < 0\}$

④ $f(x) = 4 - (x + 2)^4$

SOL

$$f(x) = 4 - (x + 2)^4$$

$$f'(x) = -4(x + 2)^3$$

$$f''(x) = -12(x + 2)^2$$

نجعل $f''(x) = 0$

$$-12(x + 2)^2 = 0 \quad \div -12$$

$$(x + 2)^2 = 0$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$f(-2) = 4 - (-2 + 2)^4 = 4$$

نقطة مرشحة $(-2 , 4)$

اشارة $f''x$: - - - - - - - -2 - - - - - -
تحدب | تحدب

مناطق التحدب $\{x : x > -2\}$ ، $\{x : x < -2\}$

نقطة مرشحة $(-2 , 4)$

5 $f(x) = 3 - 2x - x^2$

SOL

$$f(x) = 3 - 2x - x^2$$
$$f'(x) = 2 - 2x$$
$$f''(x) = -2 < 0$$

∴ لا توجد نقطة انقلاب والدالة محدبة $\forall x \in R$

6 $f(x) = 4x^4 + 3x^2 - 3$

SOL

$$f(x) = x^4 + 3x^2 - 3$$
$$f'(x) = 4x^3 + 6x$$
$$f''(x) = 12x^2 + 6 > 0$$

∴ لا توجد نقطة انقلاب والدالة مقعرة $\forall x \in R$

7 $xy = 1 - y$

SOL

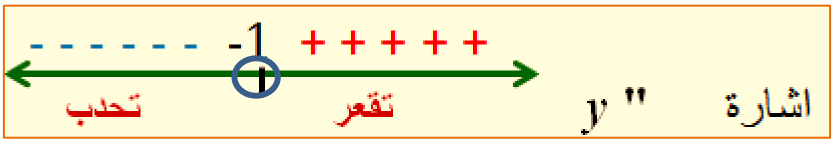
$$xy = 1 - y$$
$$xy + y = 1 \Rightarrow y(x+1) = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x+1}$$
$$y = (x+1)^{-1}$$
$$y' = -(x+1)^{-2}$$
$$y'' = 2(x+1)^{-3} = \frac{2}{(x+1)^3}$$

نجعل $y'' = 0$

$$\frac{2}{(x+1)^3} = 0 \Rightarrow 2 \neq 0$$

∴ لا توجد نقط انقلاب

07802543623



مناطق التقعر $\{x : x > -1\}$

مناطق التحدب $\{x : x < -1\}$

اختبار المشتقة الثانية لنقط النهايات العظمى والصغرى المحلية

لمعرفة نوع النقاط الحرجة باستخدام المشتقة الثانية نتبع ما يلي

1 - نجد $f'(x)$ ، $f''(x)$

2 – نجد قيمة x بجعل $f'(x) = 0$ ونعوضها في $f''(x)$ فاذا كانت الاشارة بعد التعويض

a - موجبة فالنقطة الحرجة نقطة نهاية صغرى محلية .

b - سالبة فالنقطة الحرجة نقطة نهاية عظمى محلية .

c - صفر فان هذه الطريقة فاشلة نعود باستخدام المشتقة الاولى .

Exa

باستخدام اختبار المشتقة الثانية ان امكن جد النهايات المحلية للدوال التالية

1 $f(x) = 6x - 3x^2 - 1$

SOL

$$f(x) = 6x - 3x^2 - 1$$
$$f'(x) = 6 - 6x$$

نجعل $f'(x) = 0$

$$6 - 6x = 0 \qquad \div\ 6$$
$$1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$$
$$f''(x) = -6$$
$$f''(1) = -6 < 0$$

$\therefore$ للدالة نهاية عظمى محلية عند $x = 1$

② $f(x) = x - \frac{4}{x^2}$ $x \neq 0$

SOL

$f(x) = x - \frac{4}{x^2}$

$f(x) = x - 4x^{-2}$

$f'(x) = 1 + 8x^{-3}$

$= 1 + \frac{8}{x^3}$

نجعل $f'(x) = 0$

$1 + \frac{8}{x^3} = 0 \qquad \times\ x^3$

$x^3 + 8 = 0$

$x^3 = -8$

$x = -2$

$f''(x) = -24x^{-4} = \frac{-24}{x^4}$

$f''(-2) = \frac{-24}{(-2)^4} = \frac{-24}{16} < 0$

∴ للدالة نهاية عظمى محلية عند $x = -2$

$f(-2) = -2 - \frac{4}{(2)^2} = -2 - \frac{4}{4} = -2 - 1 = -3$

∴ النهاية العظمى هي (-3)

③ $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

SOL

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

نجعل $f'(x) = 0$

$3x^2 - 6x - 9 = 0 \qquad \div 3$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x - 3)(x + 1) = 0$

either $(x - 3) = 0$ $x = 3$

or $(x + 1) = 0$ $x = -1$

$f''(x) = 6x - 6$

$f''(3) = 6 \times 3 - 6 = 18 - 6 = 12$

∴ للدالة نهاية صغرى محلية عند $x = 3$

وهي $f(3) = (3)^3 - 3(3)^2 - 9(3) = 27 - 27 - 27 = -27$

$f''(-1) = 6 \times (-1) - 6 = -6 - 6 = -12 < 0$

∴ للدالة نهاية عظمى محلية عند $x = -1$

وهي $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) = -1 - 3 + 9 = 5$

4 $f(x) = 4 - (x+1)^4$

SOL

$f(x) = 4 - (x+1)^4$

$f'(x) = -4(x+1)^3$

نجعل $f'(x) = 0$

$-4(x+1)^3 = 0 \qquad \div -4$

$(x+1)^3 = 0 \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$f''(x) = -12(x+1)^2$

$f''(-1) = -12(-1+1)^2 = 0$

هذه الطريقة لا تصح نعود الى ملاحظة اشارة $f'(x)$

الشارة $f'(x)$: +++++++ -1 - - - - - - - - -

مناطق التزايد $\{x : x < -1\}$

مناطق التناقص $\{x : x > -1\}$

∴ للدالة نهاية عظمى عند $(x = -1)$

وهي $f(-1) = 4 - (-1+1)^4 = 4$

الثوابت

ملاحظات

07802543623

EXA

❶ لتكن $a \in R$ ، $x \neq 0$ ، $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$

فجد قيمة a علما ان الدالة تمتلك نقطة انقلاب عند $x = 1$

ثم بين ان الدالة f لا تمتلك نهاية عظمى محلية .

SLO

$$f(x) = x^2 + \frac{a}{x} = x^2 + a\,x^{-1}$$

∵ للدالة نقطة انقلاب في $x = 1$

∴ $f''(1) = 0$

$$f'(x) = 2x - a\,x^{-2}$$

$$f''(x) = 2 + 2a\,x^{-3} = 2 + \frac{a}{x^3}$$

$$f''(1) = 2 + \frac{a}{(1)^3} = 2 + 2a \qquad \div 2$$

$$1 + a = 0$$

$$a = -1$$

$$\therefore \quad f(x) = x^2 - \frac{1}{x} = x^2 - x^{-1}$$

$$f'(x) = 2x + x^{-2} = 2x + \frac{1}{x^2}$$

نجعل $f'(x) = 0$

$$2x + \frac{1}{x^2} = 0 \qquad \times \quad x^2$$

$$2x^3 + 1 = 0 \Rightarrow 2x^3 = -1 \Rightarrow x^3 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{-1}{2}}$$

$$f''(x) = 2 - 2x^{-3} = 2 - \frac{2}{x^3}$$

$$f''\left(\sqrt[3]{\frac{-1}{2}}\right) = 2 - \frac{2}{\left(\sqrt[3]{\frac{-1}{2}}\right)^3} = 2 - \frac{2}{-\frac{1}{2}} = 2 + 4 = 6 > 0$$

∴ للدالة نهاية صغرى محلية عند $x = \sqrt[3]{\frac{-1}{2}}$

∴ الدالة لا تمتلك نهاية عظمى محلية عند $x = \sqrt[3]{\frac{-1}{2}}$

EXA

عين قيمتي الثابتين a , b لكي يكون لمنحني الدالة $y = x^3 + a x^2 + b x$ نهاية عظمى عند $x = -1$ ونهاية صغرى محلية عند $x = 2$ ثم جد نقطة الانقلاب .

SLO

$$y = x^3 + a x^2 + b x$$

∵ للدالة نهاية عظمى محلية عند $x = -1$

∴ $f'(-1) = 0$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2a x + b$$
$$0 = 3x^2 + 2a x + b$$
$$0 = 3(-1)^2 + 2a(-1) + b$$
$$0 = 3 - 2a + b \quad \dots\dots\dots\dots (1)$$

∵ للدالة نهاية صغرى محلية عند $x = 2$

∴ $f'(2) = 0$

$$0 = 3(2)^2 + 2a(2) + b$$
$$0 = 12 + 4a + b \quad \dots\dots\dots\dots (2)$$

بالطرح $0 = \mp 3 \pm 2a \mp b \quad \dots\dots\dots\dots (1)$

$$0 = 9 + 6a$$

$$\boxed{a = \frac{-9}{6} = \frac{-3}{2}}$$

نعوض في (1)

$$0 = 3 - 2 \times \frac{-3}{2} + b = 3 + 3 + b = 6 + b \Rightarrow \boxed{b = -6}$$

$$\boxed{y = x^3 + a x^2 + b x}$$

$$y = x^3 - \frac{3}{2} x^2 - 6x \quad , \quad \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3x - 6 \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 3$$

نجعل $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

$$6x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{3}{8} - 3 = \frac{-2}{8} - 3$$
$$= \frac{-1}{4} - 3 = \frac{-13}{4}$$

نقطة مرشحة $\left(\frac{1}{2} ، \frac{-13}{4}\right)$

اشارة $\frac{d^2y}{d\,x^2}$　　$+ + + +$　　$\frac{1}{2}$　　$- - - - - -$

تقعر　　تحدب

مناطق التقعر　　$\{x : x > \frac{1}{2}\}$

مناطق التحدب　　$\{x : x < \frac{1}{2}\}$

نقطة انقلاب $\left(\frac{1}{2} ، \frac{-13}{4}\right)$

EXA

اذا كان منحني الدالة $f(x) = ax^3 + b\,x^2 + c$ مقعر في $\{x : x < 1\}$ ومحدب في $\{x : x > 1\}$ ويمس المستقيم $y + 9x = 28$ عند النقطة $(3,1)$ فجد قيم $a , b , c \in R$

SLO

∵ الدالة مستمرة لانها كثيرة الحدود

ومقعرة في $\{: x < 1\}$ ومحدبة في $\{x : x > 1\}$

∴ الدالة تمتلك نقطة انقلاب في $x = 1$

∴ $f''(1) = 0$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2b\,x$$
$$f''(x) = 6ax + 2b$$
$$f''(1) = 6a(1) + 2b = 6a + 2b = 0 \quad \text{.......... (1)}$$

∵ المستقيم يمس المنحني

∴ ميل المستقيم = ميل المنحني

ميل المماس　$\frac{dy}{dx} + 9 = 0$　⟸　$y + 9x = 28$

ميل المنحني عند نقطة التماس　$\frac{dy}{dx} = -9 = f'(3)$

$$f'(3) = 3a(3)^2 + 2b(3) = 27a + 6b = -9 \quad \div 3$$
$$= 9a + 2b = -3 \quad \text{.......... (2)}$$

بالطرح　$\mp 6a \mp 2b = 0$　.......... (1)

$$3a = -3$$
$$\boxed{a = -1}$$

نعوض في (1)

$6\,(-1) + 2b = 0 \qquad \div 2$

$-3 + b = 0$

$\boxed{b = 3}$

تحقق معادلة المنحني $(3,1)$

$f(x) = -x^3 + 3(x)^2 + c$

$1 = -(3)^3 + 3(3)^2 + c$

$1 = -27 + 27 + c$

$\boxed{c = 1}$

EXA

اذا كانت الدالة $f(x) = ax^3 + 3x^2 + c$ نهاية عظمى محلية تساوي (8) ونقطة انقلاب عند $x = 1$ فجد قيم $a\,,c \in R$

SLO

$f(x) = ax^3 + 3x^2 + c$

∵ الدالة تمتلك نقطة انقلاب في $x = 1$

$f''(1) = 0$

$f'(x) = 3ax^2 + 6x$

$f''(x) = 6ax + 6$

$f''(1) = 6a(1) + 6 \Rightarrow 6a + 6 = 0 \qquad \div 6$

$a + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{a = -1}$

$f(x) = -x^3 + 3x^2 + c$

∵ الدالة للدالة نهاية عظمى محلية تساوي (8)

يعني $(\,?\,,\,8\,)$

$f'(x) = -3x^2 + 6x$

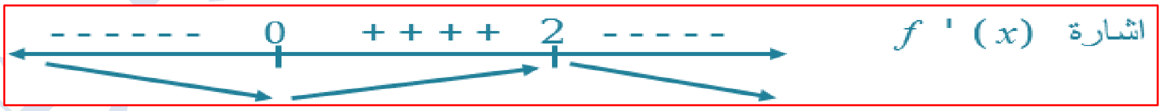
$f'(x) = 0$

$-3x^2 + 6x = 0 \qquad \div 3$

$-x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(-x + 2) = 0$

either $\quad x = 0$

or $\quad -x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2$



$(2\,,\,8)$ نقطة نهاية عظمى محلية وتحقق معادلة منحني الدالة

$8 = -(2)^3 + 3(2)^2 + c = -8 + 12 + c$

$8 = 4 + c$

$c = 8 - 4$

$\boxed{c = 4}$

EXA

اذا كانت $(2 , 6)$ نقطة حرجة لمنحني الدالة $f(x) = a - (x - b)^4$

فجد قيم $a , b \in R$ وبين نوع النقطة الحرجة

SLO

$$f(x) = a - (x - b)^4$$

$(2 , 6)$ نقطة حرجة

$f'(2) = 0$

$$f'(x) = -4(x - b)^3$$

$$f'(2) = -4(2 - b)^3$$

$$-4(2 - b)^3 = 0 \qquad \div -4$$

$$(2 - b)^3 = 0 \Rightarrow 2 - b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 2}$$

$$f(x) = a - (x - 2)^4$$

$(2 , 6)$ تحقق معادلة المنحني

$$6 = a - (2 - 2)^4 \Rightarrow \boxed{a = 6}$$

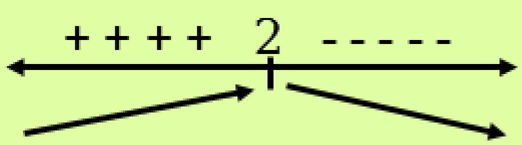
$$f(x) = 6 - (x - 2)^4$$

$$f'(x) = -4(x - 2)^3 \qquad f'(x) = 0$$

$$-4(x - 2)^3 = 0 \qquad \div -4$$

$$(x - 2)^3 = 0 \qquad x - 2 = 0 \qquad \boxed{x = 2}$$

اشارة $f'(x)$



$(2 , 6)$ نقطة نهاية عظمى محلية

EXA

اذا كان $f(x) = ax^2 - 6x + b$ حيث ان $a \in \{-4 , 8\} , b \in R$

جد قيمة a اذا كانت ❶ الدالة f محدبة ❷ الدالة f مقعرة

SLO

الدالة محدبة عند $f''(x) < 0$

$$f(x) = ax^2 - 6x + b$$

$$f'(x) = 2ax - 6$$

$$f''(x) = 2a$$

$$2a < 0 \qquad \div 2 \Rightarrow a < 0$$

$\boxed{a = -4}$

لان $a \in \{-4 , 8\}$

الدالة محدبة عند $f''(x) > 0$

$a > 0 \Rightarrow \div 2 \quad 2a > 0$

$\boxed{a = 8}$

EXA

اذا كان $f(x) = ax^3 + bx^2 - 9x$ وكان $f'(3) = 0$

وكان $f(-1) = 5$ فجد قيمة $a , b \in R$

SLO

$f(x) = ax^3 + bx^2 - 9x$

$\because f'(3) = 0$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx - 9$

$f'(3) = 3a(3)^2 + 2b(3) - 9$

$27a + 6b - 9 = 0 \quad \div 3$

$9a + 2b - 3 = 0$

$9a + 2b = 3 \quad \ldots\ldots\ldots(1)$

$\because f(-1) = 5$

$f(-1) = a(-1)3 + b(-1)^2 - 9(-1)$

$5 = -a + b + 9 \Rightarrow a - b = 9 - 5 = 4$

$a - b = 4 \quad \times 2$

$2a - 2b = 8 \quad \ldots\ldots\ldots(2)$

$9a + 2b = 3 \quad \ldots\ldots\ldots(1)$

بالجمع $2a - 2b = 8 \quad \ldots\ldots\ldots(2)$

$11a = 11$

$\boxed{a = 1}$

نعوض في (1) $\quad 9a + 2b = 3$

$9(1) + 2b = 3 \qquad 9 + 2b = 3$

$2b = 3 - 9$

$2b = -6$

$\boxed{b = -3}$

EXA

اذا كان 6 تمثل نهاية صغرى لمنحني الدالة $f(x) = 3x^2 - x^3 + c$ فجد $c \in R$ ثم جد معادلة مماس المنحني في نقطة انقلابه .

SLO

$$f(x) = 3x^2 - x^3 + c$$

$\because$ 6 تمثل نهاية صغرى محلية

$\therefore$ (? , 6) نهاية صغرى محلية

$$f'(x) = 6x - 3x^2$$

نجعل $f'(x) = 0$

$6x - 3x^2 = 0 \qquad \div 3$

$2x - x^2 = 0 \Rightarrow x(2 - x) = 0$

either $\quad x = 0$

or $\quad 2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$

اشارة $f'(x)$: $\quad$ - - - - - - 0 + + + + 2 - - - - -

(0 , 6) نقطة نهاية صغرى محلية وتحقق معادلة المنحني

$6 = 3(0)^2 - (0)^3 + c \Rightarrow \boxed{c = 6}$

$f(x) = 3x^2 - x^3 + 6$

معادلة المماس نحتاج

1- نقطة التماس (x_1 , y_1)

2- ميل المماس $= m = f'(x_1)$

3- نطبق العلاقة $y - y_1 = m(x - x_1)$

$f'(x) = 6x - 3x^2$

$f''(x) = 6 - 6x$

نجعل $f''(x) = 0$

$6 - 6x = 0 \qquad \div 6$

$1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$

$f(1) = 3(1)^2 - (1)^3 + 6 = 3 - 1 + 6 = 8$

$\therefore$ (1 , 8) نقطة انقلاب

$f'(1) = 6(1) - 3(1)^2 = 6 - 3 = 3 = m$

$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 8 = 3(x - 1)$

$y - 8 = 3x - 3 \Rightarrow 3x - 3 - y + 8 = 0$

$3x - y + 5 = 0$ معادلة المماس عند نقطة الانقلاب

07802543623

EXA

اذا كان $f(x) = ax^3 + bx^2 + xc$, $g(x) = 1 - 12x$ وكان كل من f ، g متماسان عند نقطة انقلاب المنحني f وهي $(1, -11)$ فجد قيمة $a, b, c \in R$

SLO

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$

$\because$ $(1, -11)$ نقطة انقلاب للدالة f

$f''(1) = 0$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

$f''(1) = 6a(1) + 2b \Rightarrow 6a(1) + 2b = 0 \quad \div 2$

$3a + b = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$g'(x) = -12 \Rightarrow g'(1) = -12 = f'(1)$

لانهما متماستان عند النقطة $(1, -11)$

$f'(1) = 3a(1)^2 + 2b(1) + c$

$-12 = 3a - 2b + c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

$(1, -11)$ تحقق معادلة المنحني f

$-11 = a(1)^3 + b(1)^2 + c(1)$

$-11 = a + b + c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$

بالطرح $\pm 12 = \mp 3a \mp 2b \mp c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

$1 = -2a - b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$

بالجمع $0 = 3a - b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$\boxed{1 = a}$

نعوض في (1)

$0 = 3(1) + b \qquad \boxed{b = -3}$

نعوض في (3)

$-11 = a + b + c$

$-11 = 1 - 3 + c$

$c = 2 - 11$

$\boxed{c = -9}$

رسم المخطط البياني للدالة

لكي نرسم المخطط البياني لدالة معطاة نتبع الخطوات الآتية

1 – نحدد اوسع مجال للدالة

i. دوال كثيرة الحدود اوسع مجال للدالة = R

ii. دوال النسبية (الكسرية) اوسع مجال للدالة { التي تجعل المقام = صفر } – R

2 – التناظر

i. مع محور الصادات اذا كان $f(-x) = f(x)$

ii. مع نقطة الأصل اذا كان $f(-x) = -f(x)$

3 – نقاط التقاطع مع المحورين

i. مع محور الصادات $x = 0$

ii. مع محور السينات $y = 0$

4 – المستقيمات المحاذية فقط في الدوال النسبية (الكسرية)

i. محاذي عمودي $x =$ عدد

ii. محاذي افقي $y =$ عدد

5 – النهايات ونقط الانقلاب ومناطق التزايد والتناقص ومناطق التقعر والتحدب

6 – نقط اضافية ان احتجنا الى ذلك .

1 – اوسع مجال للدالة

i الدوال كثيرات الحدود اوسع مجال = R

EXA

جد اوسع مجال لكل من الدوال الآتية

1. $f(x) = x^2 - x$
2. $f(x) = (x+2)(x-1)^2$
3. $f(x) = 3x^2 - 6x$
4. $f(x) = 3x^2 + 4$

اوسع مجال للدالة = R

دوال النسبية اوسع مجال = R - { التي تجعل المقام = صفر }

EXA

جد اوسع مجال لكل من الدوال الآتية

1) $f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$

$x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$

اوسع مجال للدالة = $R / \{-1\}$

2) $f(x) = \frac{3x+2}{2x-4}$

$2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$

اوسع مجال للدالة = $R / \{2\}$

3) $f(x) = \frac{6}{x^2+1}$

$x^2 + 1 \neq 0$ دائماً

اوسع مجال للدالة = R

2 – التناظر

EXA

بين نوع التناظر لكل من الدوال الآتية .

1) $f(x) = 6x - x^3$

$f(-x) = 6(-x) - (-x)^3 = -6x + x^3$

$= -(6x - x^3) = -f(x)$

∴ الدالة متناظرة مع نقطة الأصل لان $f(-x) = -f(x)$

2) $f(x) = 2x^2 - x^4$

$f(-x) = 2(-x)^2 - (-x)^4 = 2x^2 - x^4 = f(x)$

∴ الدالة متناظرة مع محور الصادات لان $f(-x) = f(x)$

3) $f(x) = x^2 + 4x + 3$

$f(-x) = (-x)^2 + 4(-x) + 3 = x^2 - 4x + 3 \neq f(x)$

الدالة ليست متناظرة مع محور الصادات لان $f(-x) \neq f(x)$

الدالة ليست متناظرة مع نقطة الاصل لان $f(-x) \neq -f(x)$

4 $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

$f(-x) = \frac{-x-1}{-x+1} \neq f(x)$

الدالة ليست متناظرة مع محور الصادات لان $f(-x) \neq f(x)$

الدالة ليست متناظرة مع نقطة الاصل لان $f(-x) \neq -f(x)$

4 $f(x) = \frac{6}{x^2+3}$

$f(x) = \frac{6}{(-x)^2+3} = \frac{6}{x^2+3} = f(x)$

∴ الدالة متناظرة مع محور الصادات لان $f(-x) = f(x)$

3 – نقاط التقاطع مع المحورين

أ مع محور الصادات $x = 0$

ب مع محور السينات $y = 0$

EXA جد نقاط التقاطع مع المحورين لكل من الدوال الآتية

1 $f(x) = (1-x)^3 + 1$

أ عندما $x = 0$

$f(0) = (1-0)^3 + 1 = 1 + 1$

$f(0) = 2$

$(0, 2)$ مع محور الصادات

ب عندما $y = 0$

$(1-x)^3 + 1 = 0$

$(1-x)^3 = -1$

$1 - x = -1$

$x = 1+1 = 2$

$(2, 0)$ مع محور السينات

07802543623

② $f(x) = 10 - 3x - x^3$

أ) عندما $x = 0$

$f(0) = 10 - 3(0) - (0)^3$

$f(0) = 10$

$(0, 10)$ مع محور الصادات

ب) عندما $y = 0$

$0 = 10 - 3x - x^3$

$x^3 + 3x - 10 = 0$

$(x + 5)(x - 2) = 0$

either $(x + 5) = 0 \Rightarrow x = -5$

or $(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 2$

$(-5, 0)$ ، $(2, 0)$ مع محور السينات

③ $y = \frac{x-1}{x+1}$

أ) عندما $x = 0$

$y = \frac{0-1}{0+1} = \frac{-1}{1} = -1$

$(0, -1)$ مع محور الصادات

ب) عندما $y = 0$

$0 = \frac{x-1}{x+1} = \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$(1, 0)$ مع محور السينات

④ $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

أ) عندما $x = 0$

$f(0) = \frac{0-1}{0+1} = \frac{-1}{1} = -1$

$(0, -1)$ مع محور الصادات

ب) عندما $y = 0$

$0 = \frac{x^2-1}{x^2+1} = \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

$(1, 0)$ ، $(-1, 0)$ مع محور السينات

5 $f(x) = \frac{6}{x^2+3}$

i عندما $x = 0$

$f(0) = \frac{6}{0+3} = \frac{6}{3} = 2$

$(0\ ,2)$ مع محور الصادات

ii عندما $y = 0$

$0 = \frac{6}{x^2+3} = \Rightarrow 6 \neq 0$

لا توجد نقاط تقاطع مع محور السينات

6 $f(x) = \frac{1}{x}$

i ∵ (0) لا تنتمي الى مجال الدالة ∴ لا توجد نقاط تقاطع مع محور الصادات

ii عندما $y = 0$

$0 = \frac{1}{x} = \Rightarrow 1 \neq 0$

∴ لا توجد نقاط تقاطع مع محور السينات

4 – المستقيمات المحاذية

فقط للدوال الكسرية

محاذي عمودي $x =$ عدد

محاذي افقي $y =$ عدد

لكل الدوال الآتية جد المحاذيات وارسمها

1) $f(x) = 2x^2 - x^4$

لا توجد محاذيات لان الدالة كثيرة الحدود

2) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$

$x + 1 = 0 \;\rightarrow\; x = -1$ محاذي عمودي

$y = \dfrac{x-1}{x+1} \;\rightarrow\; y(x+1) = x - 1 \;\rightarrow\; yx + y = x - 1$

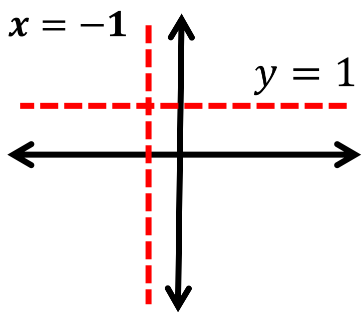
$yx - x = y - 1$

$x(y-1) = 1 - y$

$x = \dfrac{-1-y}{y-1}$

$y - 1 = 0$

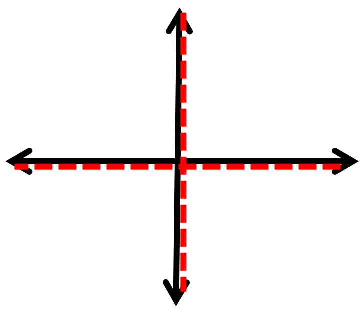
$y = 1$



3) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

$x = 0$ محاذي عمودي

$y = 0$ محاذي افقي

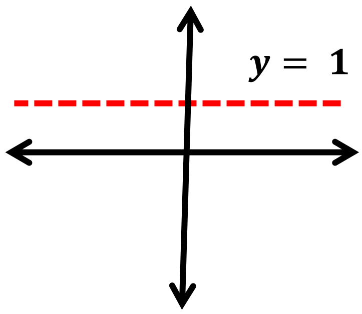


4 $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

$x^2 + 1 \neq 0$ دائما

لا يوجد محاذي عمودي

محاذي افقي $y = 1$

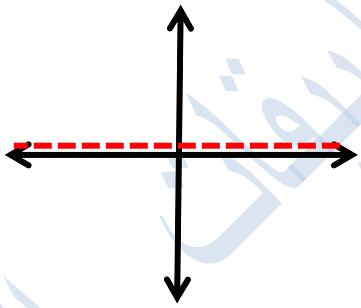


5 $f(x) = \frac{6}{x^2+3}$

$x^2 + 3 \neq 0$

لا يوجد محاذي عمودي

محاذي افقي $y = 0$



EXA ارسم بالاستعانة بمعلوماتك في التفاضل منحني الدالة

$f(x) = x^5$

SOL

1 اوسع مجال للدالة $= \mathbf{R}$

2 التناظر $f(-x) = (-x)^5 = -x^5 = -f(x)$

∴ الدالة متناظرة مع نقطة الأصل

3 نقاط التقاطع

i. $x = 0$ $f(0) = (0)^5 = 0$

$(0, 0)$ مع محور الصادات

ii. $y = 0$ $0 = x^5 \rightarrow x = 0$

$(0, 0)$ مع محور السينات

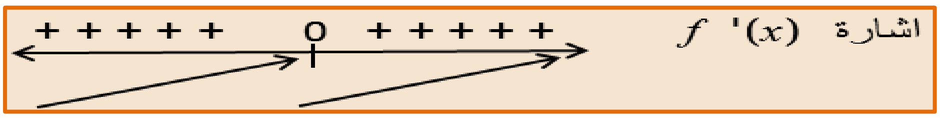
4 المحاذيات : لا توجد

5 النهايات ونقط الانقلاب $f'(x) = 5x^4$

نجعل $f'(x) = 0$

$5x^4 = 0 \quad \div 5 \rightarrow x^4 = 0 \rightarrow x = 0$

$(0, 0)$ نقطة حرجة



مناطق التزايد $\{x : x > 0\}$ ، $\{x : x < 0\}$

$(0 , 0)$ نقطة حرجة

$$f''(x) = 20x^3$$

نجعل $f''(x) = 0$

$20x^3 = 0 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$

$(0 , 0)$ نقطة مرشحة

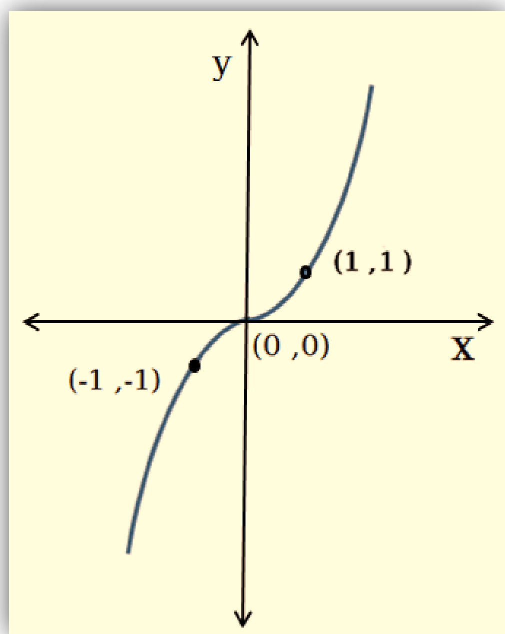
اشارة $f'(x)$: - - - - - - - - 0 + + + + + +

تحدب　　تقعر

مناطق التقعر $\{x : x > 0\}$

مناطق التحدب $\{x : x < 0\}$

$(0 , 0)$ نقطة انقلاب



6 نقط اضافية

x , y	x	y
(0 ,0)	0	0
(1 ,1)	1	1
(-1 ,-1)	-1	-1
(2 ,32)	32	2
(-2 ,-32)	-32	-2

EXA

ارسم بالاستعانة بالتفاضل منحني الدالة

$$y = x^3 - 3x^2 + 4$$

SOL

1 اوسع مجال للدالة $= \mathbf{R}$

2 التناظر

$$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 + 4$$
$$= -x^3 - 3x^2 + 4$$

الدالة ليست متناظرة مع محور الصادات لان $f(-x) \neq f(x)$

الدالة ليست متناظرة مع نقطة الأصل لان $f(-x) \neq -f(x)$

3 نقاط التقاطع

$x = 0$　　$y = f(0) = (0)^3 - 3(0)^2 + 4 = 4$

$(0 , 4)$ مع محور الصادات

4 المحاذيات : لا توجد لان الدالة ليست نسبية (كسرية)

5 النهايات ونقط الانقلاب

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

نجعل $f'(x) = 0$

$3x^2 - 6x = 0 \quad \div 3 \Rightarrow x^2 - 2x = 0$

$x(x-2) = 0$

either $x = 0 \Rightarrow f(0) = 4$

نقطة حرجة $(0\ ,4)$

or $x - 2 = 0 \quad x = 2$

$f(2) = (2)^3 - 3(2)^2 + 4 = 8 - 12 + 4 = 0$

نقطة حرجة $(2\ ,0)$

اشارة $f'(x)$: + + + + + + + 0 - - - - - - - - 2 + + + + + +

مناطق التزايد $\{x : x > 2\}$ ، $\{x : x < 0\}$

مناطق التناقص الفترة $(0, 2)$

$(0\ ,4)$ نقطة نهاية عظمى محلية .

$(2\ ,0)$ نقطة نهاية صغرى محلية .

$f''(x) = 6x - 6$

نجعل $f''(x) = 0$

$6x - 6 = 0 \quad \div 6 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$f(1) = (1)^3 - 3(1)^2 + 4 = 1 - 3 + 4 = 2$

نقطة مرشحة $(1\ ,2)$

اشارة $f''(x)$: - - - - - - - - 1 + + + + + +
تحدب　تقعر

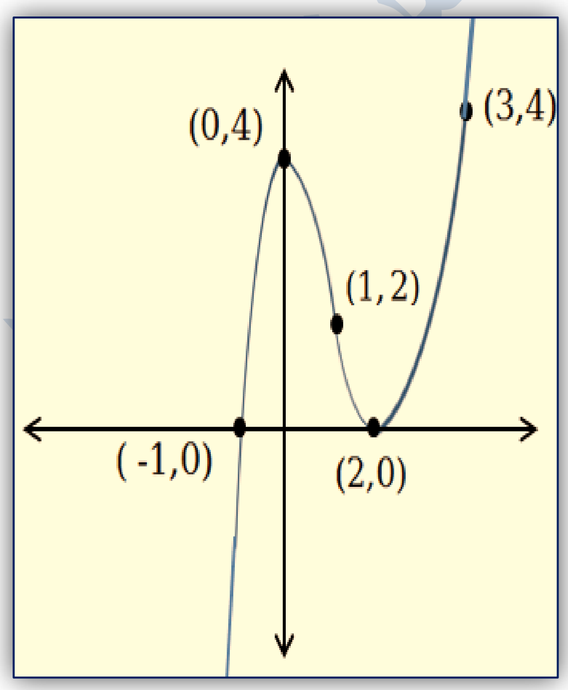
مناطق التقعر $\{x : x > 1\}$

مناطق التحدب $\{x : x < 1\}$

نقطة انقلاب $(1\ ,2)$

6 نقط اضافية

y	x
-1	0
3	4



EXA

ارسم بالاستعانة بالتفاضل منحني الدالة

$$y = 10 - 3x - x^2$$

SOL

1 اوسع مجال للدالة $= \mathbf{R}$

2 التناظر

$f(-x) = 10 - 3(-x) - (-x)^2$

$= 10 + 3x - x^2$

الدالة ليست متناظرة مع محور الصادات لان $f(-x) \neq f(x)$

الدالة ليست متناظرة مع نقطة الأصل لان $f(-x) \neq -f(x)$

3 نقاط التقاطع

i. عندما $x = 0$

$f(0) = 10 - 3(0) - (0)^2 = 10$

$(0, 10)$ مع محور الصادات

i. عندما $y = 0$

$0 = 10 - 3x - x^2 \qquad x^2 + 3x - 10 = 0$

$(x+5)(x-2) = 0$

either $(x+5) = 0 \Rightarrow x = -5$

or $(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2$

$(2, 0)$ ، $(-5, 0)$ مع محور السينات

4 المحاذيات : لا توجد لان الدالة ليست نسبية (كسرية)

5 النهايات ونقط الانقلاب

$f'(x) = -3 - 2x$

نجعل $f'(x) = 0$

$-3 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x = \frac{-3}{2}$

$f\left(\frac{-3}{2}\right) = 10 - 3\left(\frac{-3}{2}\right) - \left(\frac{-3}{2}\right)^2$

$= 10 + \frac{9}{2} - \frac{9}{4} = \frac{40+18-9}{4} = \frac{49}{4}$

$\left(\frac{-3}{2}, \frac{49}{4}\right)$ نقطة حرجة

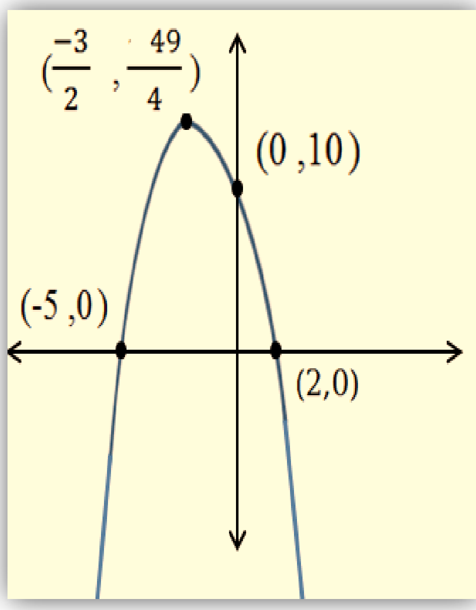
اشارة $f'(x)$ $\quad + + + + + + + \quad -\frac{3}{2} \quad - - - - - -$

مناطق التزايد $\{x : x < \frac{-3}{2}\}$ ، مناطق التناقص $\{x : x > \frac{-3}{2}\}$

$\left(\frac{-3}{2}, \frac{49}{4}\right)$ نقطة نهاية عظمى محلية

$f''(x) = -2 < 0$

∴ لاتوجد قطة انقلاب والدالة محدبة $\forall x \in R$



6 نقط اضافية

y	x
0	-5

EXA ارسم منحني الدالة باستخدام التفاضل

$f(x) = 2x^2 - x^4$

SOL

1 اوسع مجال للدالة $= R$

2 التناظر $f(-x) = 2(-x)^2 - (-x)^4 = 2x^2 - x^4 = f(x)$

الدالة متناظرة مع محور الصادات لان $f(-x) = f(x)$

3 نقاط التقاطع

i. عندما $x = 0$

$f(0) = 2(0)^2 - (0)^4 = 0$

$(0 , 0)$ مع محور الصادات

ii. عندما $y = 0$

$0 = 2x^2 - x^4 \Rightarrow x^2(2 - x^2) = 0$

either $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

or $(2 - x^2) = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

$(-\sqrt{2} , 0)$ ، $(\sqrt{2} , 0)$ ، $(0 ,0)$ مع محور السينات

4 المحاذيات : لا توجد

5 النهايات ونقط الانقلاب

$f'(x) = 4x - 4x^3$

نجعل $f'(x) = 0$

$4x - 4x^3 = 0 \quad \div 4 \Rightarrow x - x^3 = 0 \Rightarrow x(1 - x^2) = 0$

either $x = 0 \Rightarrow (0, 0)$ نقطة حرجة

or $(1 - x^2) = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$f(1) = 2(1)^2 - (1)^4 = 2 - 1 = 1$

$f(-1) = 2(-1)^2 - (-1)^4 = 2 - 1 = 1$

نقاط حرجة $(-1, 1)$ ، $(+1, 1)$

اشارة $f'(x)$

+ + + + + + -1 - - - - - - - 0 + + + + + + + 1 - - - - - - -

مناطق التزايد $\{x : x < -1\}$ والفترة $(0, 1)$

مناطق التناقص $\{x : x > 1\}$ والفترة $(-1, 0)$

$(-1, 1)$ نقطة نهاية عظمى محلية

$(0, 0)$ نقطة نهاية صغرى محلية

$(1, 1)$ نقطة نهاية عظمى محلية

$f''(x) = 4 - 12x^2$

نجعل $f''(x) = 0$

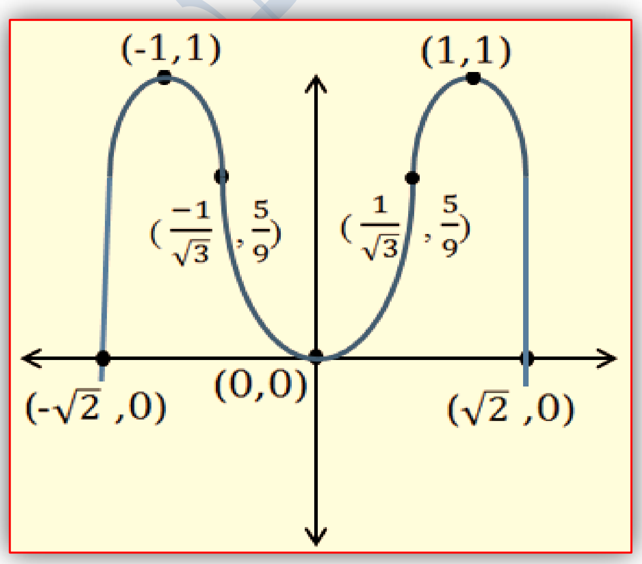
$4 - 12x^2 = 0 \quad \div 4 \Rightarrow 1 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$f''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{6-1}{9} = \frac{5}{9}$

نقط مرشحة $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9}\right)$ ، $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9}\right)$

- - - - - - - - $\frac{-1}{\sqrt{3}}$ + + + + + + + $\frac{1}{\sqrt{3}}$ - - - - - - -

تحدب   تقعر   تحدب



مناطق التقعر الفترة $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

مناطق التحدب $\left\{x : x > \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

$\left\{x : x < \frac{-1}{\sqrt{3}}\right\}$

نقط انقلاب $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9}\right)$ ،$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9}\right)$

EXA

ارسم بالاستعانة بمعلوماتك في التفاضل منحنى الدالة

$f(x) = (1-x)^3+1$

SOL

1 اوسع مجال للدالة $= \mathbb{R}$

2 نقاط التقاطع

i. عندما $x = 0$ $\quad f(0) = (1-0)^3+1 = 1+1 = 2$

$(0 \, , 2)$ مع محور الصادات

ii. عندما $y = 0$

$(1-x)^3+1 = 0$

$(1-x)^3 = -1$

$1-x = -1$

$x = 1+1 = 2$

$(2 \, , 0)$ مع محور السينات

3 التناظر $\quad f(-x) = (1-x)^3+1$

الدالة ليست متناظرة مع محور الصادات لان $\quad f(-x) \neq f(x)$

الدالة ليست متناظرة مع نقطة الأصل لان $\quad f(-x) \neq -f(x)$

4 المحاذيات : لا توجد

5 النهايات ونقط الانقلاب

$f'(x) = 3(1-x)^2(-1) = -3(1-x)^2$

نجعل $f'(x) = 0$

$-3(1-x)^2 = 0 \quad \div -3 \Rightarrow (1-x)^2 = 0 \Rightarrow 1-x = 0 \Rightarrow x = 1$

$(1 \, , 1)$ نقطة حرجة

مناطق التناقص $\{x : x > 1\}$ ، $\{x : x < 1\}$

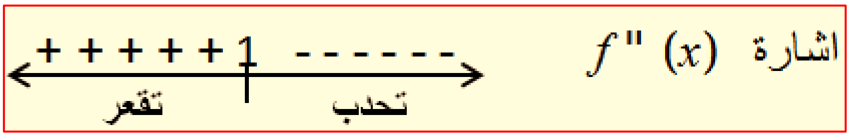
$(1 \, , 1)$ نقطة حرجة

$f'(x) = -6(1-x)(-1)$

نجعل $f''(x) = 0$

$6(1-x) = 0 \quad \div 6 \Rightarrow 1-x = 0 \Rightarrow x = 1$

$(1 \, , 1)$ نقطة مرشحة



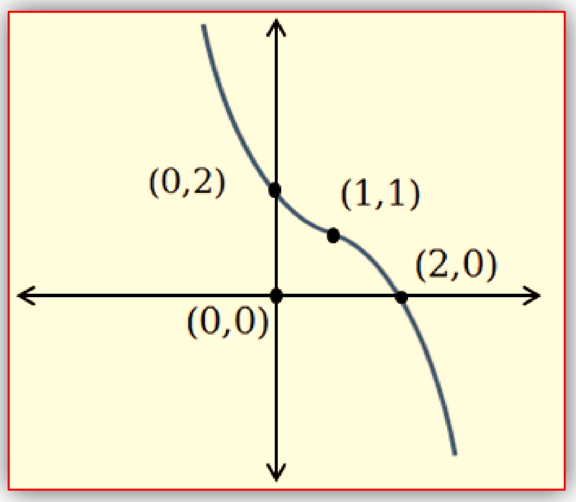
مناطق التقعر $\{x : x < 1\}$

مناطق التحدب $\{x : x > 1\}$

نقطة انقلاب $(1 , 1)$

6 نقط اضافية

y	x
9	-1
-7	3



EXA

بالاستعانة بالتفاضل ارسم منحني الدالة

SOL

$$f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$$

1 اوسع مجال للدالة = $R / \{-1\}$

2 التناظر

∵ 1 ينتمي الى مجال الدالة ولكن (1-) لا ينتمي الى مجال الدالة

∴ المنحني غير متناظر مع محور الصادات ولا مع نقطة الأصل

3 نقاط التقاطع

i. عندما $x = 0$ $\quad f(0) = \frac{3(0)-1}{0+1} = \frac{-1}{1} = -1$

$(0 , -1)$ مع محور الصادات

ii. عندما $y = 0$ $\quad \frac{3x-1}{x+1} = 0$

$x = \frac{1}{3}$ ⟵ $3x = 1$ ⟵ $3x - 1 = 0$

$(\frac{1}{3} , 0)$ مع محور السينات

4 المحاذيات

i. محاذي عمودي $x = -1$ ⟵ $x + 1 = 0$

ii. محاذي افقي $y = 3$

5 النهايات ونقط الانقلاب

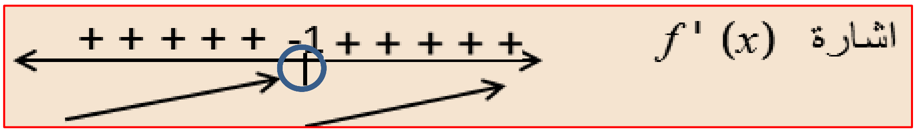
$$f'(x) = \frac{(x+1)(3)-(3x-1)(1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{3x+3-3x+1}{(x+1)^2} = \frac{4}{(x+1)^2}$$

نجعل $f'(x) = 0$

$$\frac{4}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow 4 \neq 0$$

لا توجد نهايات



مناطق التزايد $\{x : x > -1\}$ ، $\{x : x < -1\}$

$$f'(x) = 4(x+1)^{-2}$$

$$f''(x) = -8(x+1)^{-3} = \frac{-8}{(x+1)^3}$$

نجعل $f''(x) = 0$

$$\frac{-8}{(x+1)^3} = 0 \Rightarrow 8 \neq 0$$

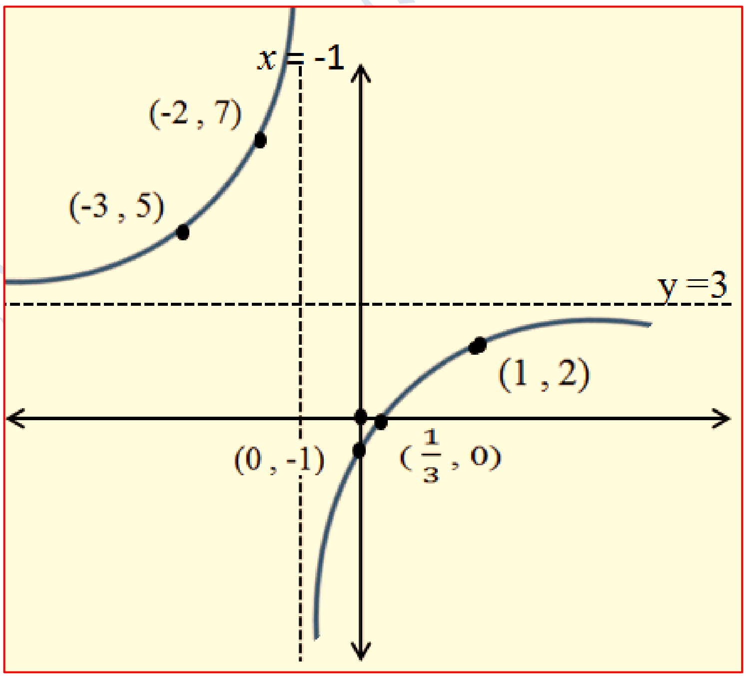
∴ لا توجد نقط انقلاب

مناطق التقعر $\{x : x < -1\}$

مناطق التحدب $\{x : x > -1\}$

6 نقط اضافية

x, y	x	y
(1,2)	2	1
(-2,7)	7	-2
(-3,5)	5	-3



EXA

باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم المنحني

SOL $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

1 اوسع مجال للدالة $= \mathbb{R}$

2 التناظر $f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{(-x)^2+1} = \dfrac{x^2}{x^2+1} = f(x)$

$f(-x) = f(x)$

∴ الدالة متناظرة مع محور الصادات لان

$f(-x) = f(x)$

3 نقاط التقاطع

i. عندما $x = 0$ $f(0) = \dfrac{0}{0+1} = 0$

$(0, 0)$ مع محور الصادات

ii. عندما $y = 0$

$\dfrac{x^2}{x^2+1} = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$(0, 0)$ مع محور السينات

4 المحاذيات

محاذي عمودي لا يوجد $x^2 + 1 \neq 0$ دائما

محاذي افقي $y = 1$

5 النهايات ونقط الانقلاب

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)(2x) - x^2(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

نجعل $f'(x) = 0$

$\dfrac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

$(0, 0)$ نقطة حرجة

اشارة $f'(x)$ - - - - - - - - 0 + + + + +

مناطق التزايد $\{x : x > 0\}$

مناطق التناقص $\{x : x < 0\}$

$(0, 0)$ نقطة نهاية صغرى محلية

$$f''(x) = \frac{(x^2+1)^2(2) - (2x)[2(x^2+1)2x]}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{(x^2+1)\,[2(x^2+1) - 8x^2]}{(x^2+1)^4} = \frac{2x^2+2-8x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3}$$

نجعل $f''(x) = 0$

$$\frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3} = 0 \Rightarrow 2 - 6x^2 = 0 \Rightarrow 6x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = \frac{2}{6}$$

$$x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

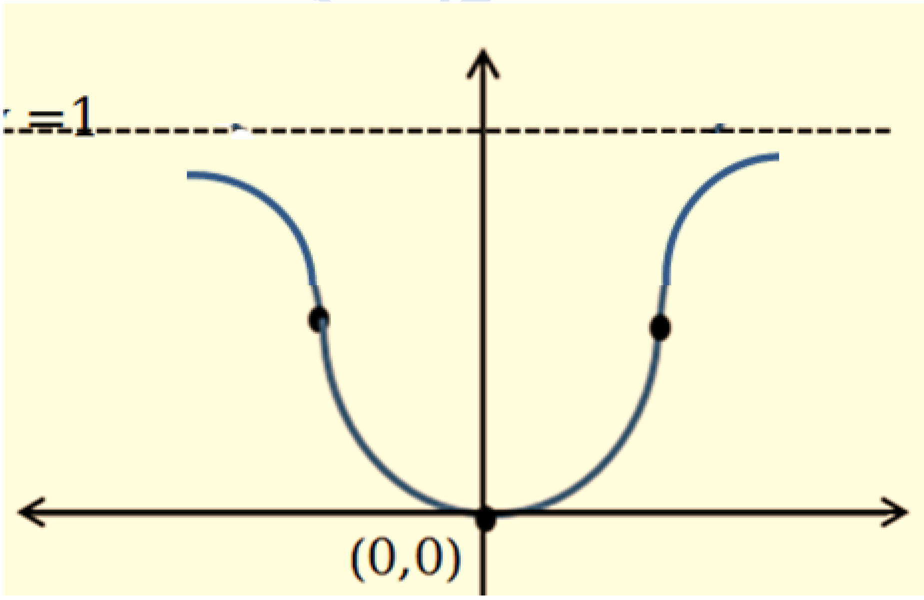
$$f(x) = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4}$$

نقط مرشحة $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{4}\right)$ ، $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{4}\right)$

اشارة $f''(x)$

$- - - - - - -\ \ \frac{-1}{\sqrt{3}}\ \ + + + + +\ \ \frac{1}{\sqrt{3}}\ \ - - - - - - -$

تحدب   تقعر   تحدب



EXA باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم المنحني

$f(x) = \frac{1}{x}$

SOL

1 اوسع مجال للدالة = $\mathbf{R} / \{0\}$

2 التناظر

$f(-x) = \frac{1}{-x} = -f(x)$

$f(-x) = -f(x)$

∴ الدالة متناظرة مع نقطة الأصل لان

3 نقاط التقاطع

i. عندما $x = 0$ لا ينتمي الى مجال الدالة .

∴ لا توجد نقاط تقاطع مع محور الصادات

ii. عندما $y = 0$

$\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow 1 \neq 0$

∴ لا توجد نقاط تقاطع مع محور السينات

4 المحاذيات

i. محاذي عمودي $x = 0$

ii. محاذي افقي $y = 0$

5 النهايات ونقط الانقلاب

$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$f'(x) = -x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

نجعل $f'(x) = 0$

$\frac{-1}{x^2} = 0 \Rightarrow -1 \neq 0$

لا توجد نهايات

اشارة $f'(x)$　- - - - - - - - 0 - - - - - - - -

مناطق التناقص $\{x : x > 0\}$ ، $\{x : x < 0\}$

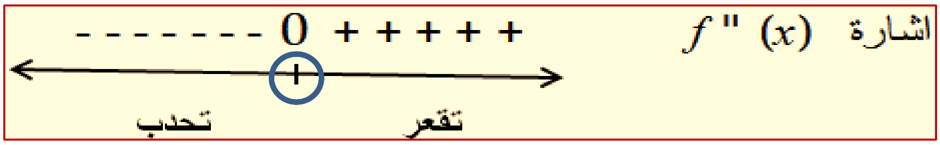
$f''(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$

نجعل $f''(x) = 0$

$\frac{2}{x^3} = 0 \Rightarrow 2 \neq 0$

07802543623

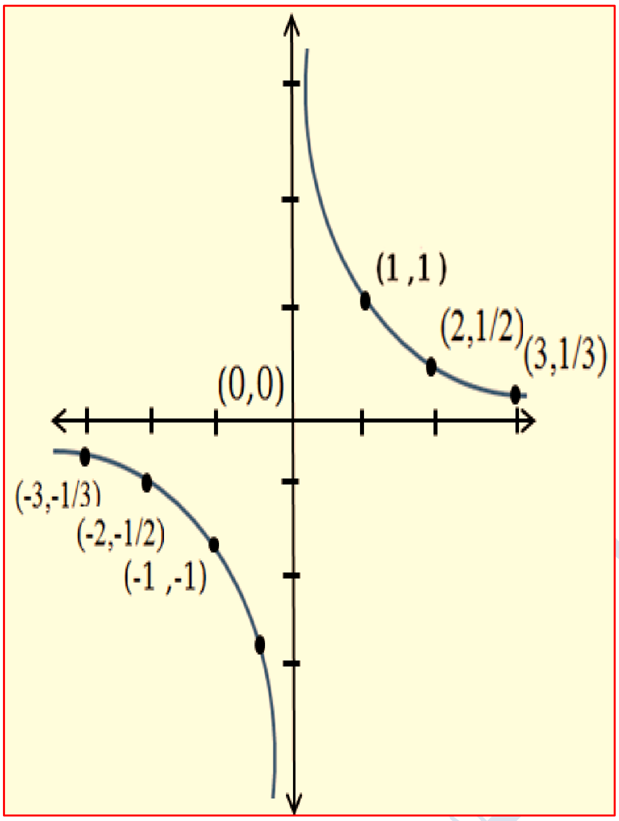
$\therefore$ لا توجد نقط انقلاب



مناطق التقعر $\{x : x > 0\}$

مناطق التحدب $\{x : x < 0\}$

6 نقط اضافية



x	y
1	1
2	1/2
3	1/3
1/2	2
1/3	3
-1	-1
-2	-1/2
-3	-1/3
-1/2	-2
-1/3	-3

تطبيقات عملية على القيم العظمى او الصغرى

لحل هذه المسائل نتبع الخطوات التالية

1. نرسم مخططا للمسألة إن امكن .
2. نعين الأجزاء المهمة في المسألة .
3. نكون الدالة المراد ايجاد قيمتها العظمى او الصغرى ونحدد مجالها على ان تكون في متغير واحد
4. اذا كان المجال فترة مغلقة نجد الأعداد الحرجة وقيم الدالة في اطراف الفترة في الأعداد الحرجة
5. ايها اكبر هي القيمة العظمى وايها اصغر هي القيمة الصغرى

Exa

جد العدد الذي اذا اضيف الى مربعه يكون الناتج اصغر ما يمكن

SOL

ليكن العدد $= x$

∴ مربع العدد $= x^2$

$$f(x) = x + x^2$$
$$f'(x) = 1 + 2x$$

نجعل $f'(x) = 0$

$$1 + 2x = 0 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -1/2$$
$$f''(x) = 2$$
$$f''(-1/2) = 2 > 0$$

∴ للدالة نهاية صغرى محلية عند $x = -1/2$

∴ العدد $= -1/2$

Exa

جد عددين موجبين مجموعهما 75 وحاصل ضرب أحدهما في مربع الأخر أكبر ما يمكن ؟

SOL

ليكن العدد الأول $= x$

العدد الثاني $= y$

07802543623

$M = x^2 y$ .... (1)

$x + y = 75 \Rightarrow y = 75 - x$ .... (2)　　نعوضها في (1)

$M = x^2 (75 - x) = 75x^2 - x^3$

$M' = 150x - 3x^2$

نجعل $M' = 0$

$0 = 150x - 3x^2 \quad \div 3 \quad \Rightarrow \quad 0 = 50x - x^2$

$0 = x (50 - x)$

either : $x = 0$　　تهمل

or : $x = 50$

$M'' = f''(x) = 150 - 6x$

$f''(50) = 150 - 6(50) = 150 - 300 = -150 < 0$

∴ للدالة نهاية عظمى عند $x = 50$

∴ العدد الأول $= 50$

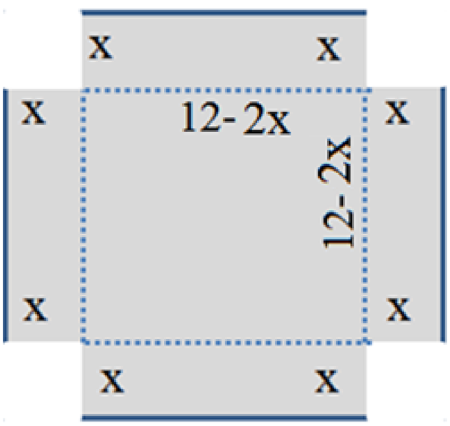
∴ العدد الثاني

$y = 75 - 50 \Rightarrow y = 25$

Exa

صنع صندوق مفتوح من قطعة نحاس مربعة الشكل طول ضلعها (**12 cm**) وذلك بقص اربعة مربعات متساوية الابعاد من اركانها الاربعة ثم ثني الاجزاء البارزة منها ، ما هو الحجم الأعظم لهذه العلبة ؟

SOL



$V = (12 - 2x) (12 - 2x) (x)$

$V = (x) (144 - 48x + 2x^2)$

$V = f(x) = 144x - 48x^2 + 4x^3$

$V' = f'(x) = 144 - 96x + 12x^2$

نجعل $f'(x) = 0$

$144 - 96x + 12x^2 = 0 \quad \div 12$

$12 - 8x + x^2 = 0$

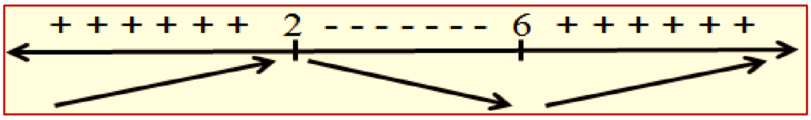
$x^2 - 8x + 12 = 0$

$(x - 2) (x - 6) = 0$

either : $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

or : $x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$

اشارة $f'(x)$



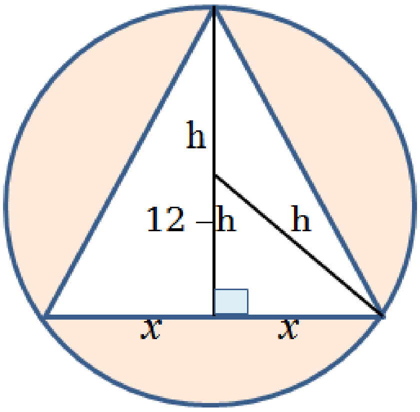
∴ للدالة نهاية عظمى محلية عند $x = 2$

$$V = (12 - 2x)^2 (x)$$
$$V = (12 - 4)^2 (2) = (64)(2) = 128 \text{ cm}^3$$

Exa

جد مساحة اكبر مثلث متساوي الساقين يمكن ان يوضع داخل دائرة نصف قطرها (12 cm) ثم برهن ان نسبة مساحة المثلث الى مساحة الدائرة كنسبة $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$

SOL



$$A = \frac{1}{2}(2x)h = xh \quad ....(1)$$
$$x^2 + (h - 12)^2 = 144$$
$$x^2 + h^2 - 24h + 144 = 144$$
$$x^2 = 24h - h^2$$
$$x = \sqrt{24h - h^2} \quad .... (2)$$

نعوض في (1)

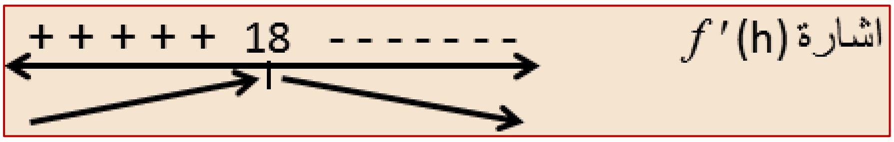
$$A = xh = h\sqrt{24h - h^2} = \sqrt{h^2(24h - h^2)}$$
$$= \sqrt{(24h^3 - h^4)} \Rightarrow A' = f'(h) = \frac{72h^2 - 4h^3}{2\sqrt{24h^3 - h^4}}$$

نجعل $A' = 0$

$$\frac{72h^2 - 4h^3}{2\sqrt{24h^3 - h^4}} = 0 \Rightarrow 72h^2 - 4h^3 = 0 \quad \div 4$$
$$18h^2 - h^3 = 0$$
$$h^2(18 - h) = 0$$

either $h^2 = 0 \Rightarrow h = 0$ يهمل

Or $h - 18 = 0 \Rightarrow h = 18$



07802543623

∴ للدالة نهاية عظمى عند $h = 18$ (الارتفاع)

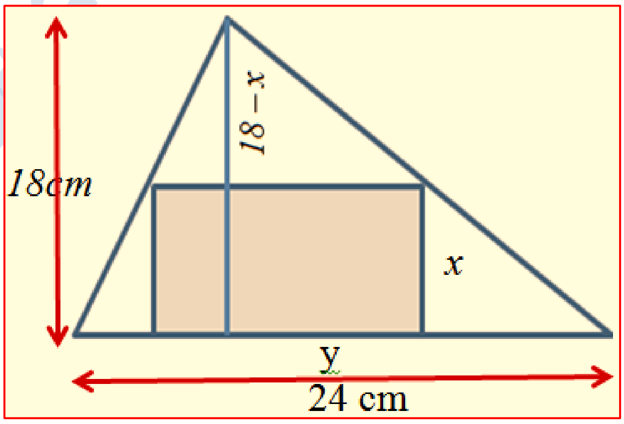
$$x = \sqrt{24h - h^2} = \sqrt{h(24-h)} = \sqrt{18(24-18)}$$
$$= \sqrt{18(6)} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}\ \text{cm}$$

$2x = 2(6\sqrt{3}) = 12\sqrt{3}$ cm   طول القاعدة

$$\frac{\text{مساحةالمثلث}}{\text{مساحة الدائرة}} = \frac{xh}{\pi r^2} = \frac{6\sqrt{3}\,(18)}{\pi(12)(12)} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$$

جد بعدي اكبر مستطيل يمكن ان يوضع داخل مثلث طول قاعدته **(24 cm)** وارتفاعه **(18 cm)** بحيث ان راسين متجاورين من رؤوسه تقعان على القاعدة والرأسين الباقيين تقعان على ساقيه .

SOL



$A = x\,y$ .... (1)

$\dfrac{y}{24} = \dfrac{18-x}{18}$ من التشابه

$18\,y = 24\,(18- x)$

$y = \dfrac{24}{18}(18- x)$

$y = \dfrac{4}{3}(18- x)$ .... (2)

$A = x\left[\dfrac{4}{3}(18 - x)\right]$ نعوضها في (1)

$A = \dfrac{4}{3}(18x - x^2)$

$A' = f'(x) = \dfrac{4}{3}(18 - 2x)$

نجعل $A' = 0$

$\dfrac{4}{3}(18 - 2x) = 0 \quad \times \dfrac{3}{4}$

$(18 - 2x) = 0$

$2x = 18 \Rightarrow x = 9$

اشارة A'

$+ + + + + + \quad 9 \quad - - - - - - - -$

∴ للدالة نهاية

البعد الثاني

$y = \frac{4}{3}(18 - x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

$= \frac{4}{3}(18 - 9) = \frac{4}{3}(9) = 4 \times 3 = 12 \text{ cm}$

Exa

جد ارتفاع اكبر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل كرة نصف قطرها $4\sqrt{3}$ cm .

SOL

$V = \pi r^2 (2h) \Rightarrow V = 2\pi r^2 h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$(4\sqrt{3})^2 = h^2 + r^2$

$48 - h^2 = r^2 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$

نعوضها في (1)

$V = 2\pi (48 - h^2) h$

$V = 2\pi (48h - h^3)$

$V' = 2\pi (48 - 3h^2)$

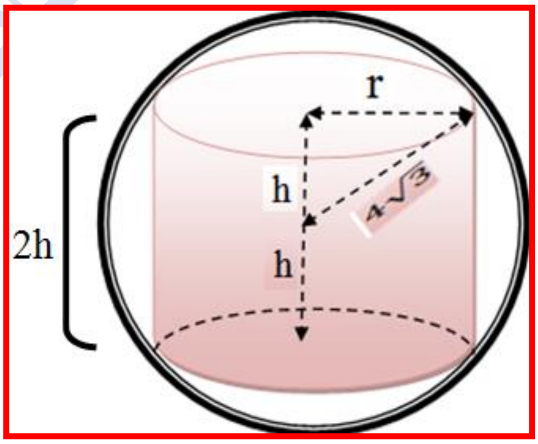
نجعل $V' = 0$

$2\pi (48 - 3h^2) = 0 \qquad \div 2\pi$

$48 - 3h^2 = 0 \qquad \div 3$

$16 - h^2 = 0$

$h = 4 \text{ cm}$



اشارة V'

$+ + + + + + \quad 4 \quad - - - - - - - -$

∴ للدالة نهاية عظمى عند $h = 4$ cm

الارتفاع $= 2h = 2 \times 4 = 8$ cm

جد بعد اكبر مستطيل يوضع داخل نصف دائرة نصف قطرها $4\sqrt{2}$ cm .

SOL

$A = 2x\,y$ .... (1)

$x^2 + y^2 = (4\sqrt{2})^2$

$y^2 = 32 - x^2$

$y = \sqrt{32 - x^2}$ ....(2)

نعوضها في (1)

$A = 2x\sqrt{32 - x^2} = 2\sqrt{x^2(32 - x^2)} = 2\sqrt{32x^2 - x^4}$

$A' = \dfrac{2(64x - 4x^3)}{2\sqrt{32x^2 - x^4}}$

نجعل $A' = 0$

$64x - 4x^3 = 0$ $\quad \div 4$

$16x - x^3 = 0 \Rightarrow x(16 - x^2) = 0$

either : $x = 0$ يهمل

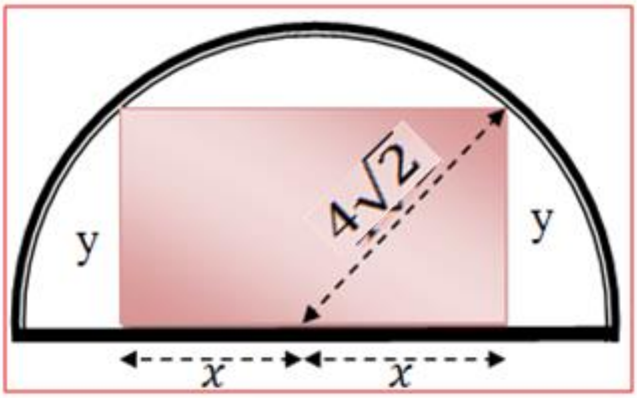
or $16 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$

اشارة A' : + + + + + + 4 - - - - - - - -

$\therefore$ للدالة نهاية عظمى عند $x = 4$ cm

الابعاد　الطول　$2x = 2 \times 4 = 8$ cm

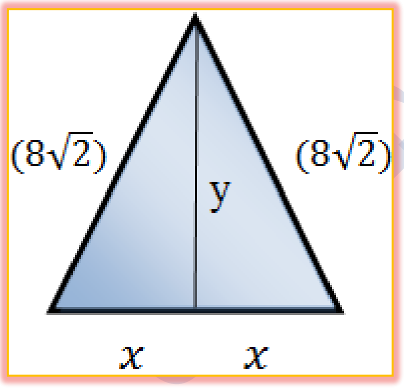
العرض　$: y = \sqrt{32 - 16} = \sqrt{16} = 4\ cm$



Exa

جد اكبر مساحة لمثلث متساوي الساقين طول كل من ساقيه $8\sqrt{2}$ cm .

SOL



$A = \frac{1}{2}\ (2x)\ h$

$A = x\ h$ .... (1)

$x^2 + h^2 = (8\sqrt{2})^2$

$x^2 + h^2 = 128$

$h^2 = 128 - x^2$

$h = \sqrt{128 - x^2}$ .... (2)

نعوضها في (1)

$A = x\ \sqrt{128 - x^2}$

$A = \sqrt{x^2\,(128 - x^2)}$

$A = \sqrt{(128\ x^2 - x^4)}$

$$A' = \frac{256\,x - 4x^3}{2\sqrt{(128\ x^2 - x^4)}}$$

نجعل $A' = 0$

$$\frac{256\,x - 4x^3}{2\sqrt{(128\ x^2 - x^4)}} = 0$$

$256\,x - 4x^3 = 0 \quad \div 4 \quad \Rightarrow \quad 64\,x - x^3 = 0$

$x\,(64 - x^2) = 0$

either : $x = 0$ يهمل

or : $x^2 - 64 = 0 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = 8$

اشارة A'

+ + + + + 8 - - - - - - - -

∴ للدالة نهاية عظمى عند $x = 8$ cm

$h = \sqrt{128 - 64} = \sqrt{64} = 8$

$A = x\ y = (8)(8) = 64\ cm^2$

07802543623

Exa

جد ابعاد اكبر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه 8 cm وطول قطر قاعدته 12 cm .

SOL

$V = \pi r^2 h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

من تشابه المثلثين

$\frac{h}{8} = \frac{6-r}{6} \Rightarrow 6h = 8(6-r) \Rightarrow h = \frac{8(6-r)}{6}$

$h = \frac{4}{3}(6-r) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

نعوضها في (1)

$V = \pi r^2 \left[\frac{4}{3}(6-r)\right] = \frac{4\pi}{3}\left[6r^2 - r^3\right]$

$V' = \frac{4\pi}{3}\left[12r - 3r^2\right]$

نجعل $V' = 0$

$\frac{4\pi}{3}(12r - 3r^2)] = 0 \quad \div \frac{4\pi}{3}$

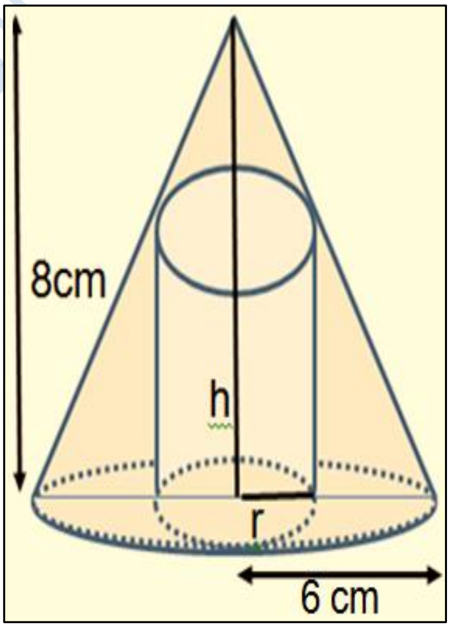
$12r - 3r^2 = 0 \quad \div 3$

$4r - r^2 = 0$

$r(4-r) = 0$

either : $r = 0$ تهمل

or : $r = 4$



اشارة V'

$+ + + + + + \; 4 \; - - - - - - - -$

$\therefore$ للدالة نهاية عظمى عند $r = 4$ cm نصف قطر الاسطوانة

$h = \frac{4}{3}(6-4) = \frac{4}{3}(2) = \frac{8}{3}$ cm ارتفاع الاسطوانة

Exa

خزان على شكل متوازي سطوح مستطيلة طول قاعدته ضعف طول عرضها فإذا كانت مساحة المعدن المستخدم في صناعتها $(108)\ cm^3$. جد أبعاد الخزان لكي يكون حجمه اكبر ما يمكن علماً ان الخزان ذو غطاء كامل ؟

SOL

$$V = 2x^2 h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$A = (4x + 2x)h + 2(2x^2)$$

$$108 = 6xh + 4x^2 \quad \div 2 \quad \Rightarrow \quad 54 = 3xh + 2x^2$$

$$54 - 2x^2 = 3xh$$

$$h = \frac{54 - 2x^2}{3x} \quad \ldots\ldots (2)$$

نعوضها في (1)

$$V = 2x^2\left(\frac{54 - 2x^2}{3x}\right) \Rightarrow V = \frac{2}{3}(54x - 2x^3)$$

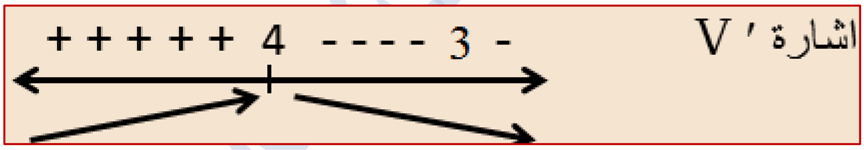
$$V' = \frac{2}{3}(54 - 6x^2) \Rightarrow$$

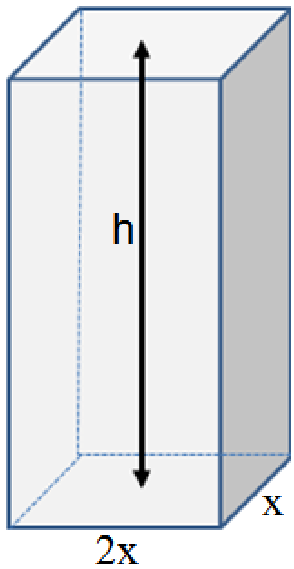
نجعل $V' = 0$

$$\frac{2}{3}(54 - 6x^2) = 0 \quad \div \frac{2}{3}$$

$$(54 - 6x^2) = 0 \quad \div 6 \Rightarrow 9 - x^2 = 0$$

$$x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$$





$\therefore$ للدالة نهاية عظمى عند $x = 3$

$$h = \frac{54 - 2(3)^2}{3(3)} = \frac{54 - 18}{9} = 4$$

الأبعاد : الطول $2x = 2(3) = 6\ cm$

العرض $x = 3\ cm$

الارتفاع $h = 4\ cm$

07802543623

Exa

مجموع محيطي دائرة ومربع يساوي **60 cm** اثبت انه عندما يكون مجموع مساحتي الشكل اصغر ما يمكن فان طول قطر الدائرة يساوي طول ضلع المربع .

SOL

A = مساحة الدائرة + مساحة المربع

$A = \pi r^2 + x^2$ .... (1)

$\mathcal{P}$ = محيط الدائرة + محيط المربع

$60 = 2\pi r + 4x \quad \div 2 \quad \Rightarrow \quad 30 = \pi r + 2x$

$\pi r = 30 - 2x \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{\pi}(30 - 2x)$ .... (2)

نعوض في (1)

$A = x^2 + \pi\left[\frac{1}{\pi}(30 - 2x)\right]^2 \Rightarrow = x^2 + \pi\left[\frac{1}{\pi^2}(900 - 120x + 4x^2)\right]$

$A = x^2 + \left(\frac{1}{\pi}(900 - 120x + 4x^2\right)$

$A' = 2x + \frac{1}{\pi}(-120 + 8x)$

نجعل $A' = 0$ $\quad \left[2x + \frac{1}{\pi}(-120 + 8x) = 0\right]\pi$

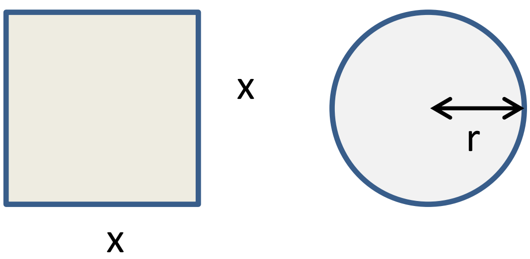
$2x\pi - 120 + 8x = 0 \quad \div 2 \quad \Rightarrow \quad x\pi - 60 + 4x = 0$

$x(\pi + 4) = 60 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{60}{\pi + 4}$ طول الضلع

$r = \frac{1}{\pi}\left(30 - 2\frac{60}{\pi+4}\right) = \frac{1}{\pi}\left(30 - \frac{120}{\pi+4}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{30\pi + 120 - 120}{\pi+4}\right)$

$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{30\pi}{\pi+4}\right) \quad \Rightarrow \quad r = \frac{30}{\pi+4}$

قطر الدائرة $= 2r = 2\frac{30}{\pi+4} = \frac{60}{\pi+4}$ طول ضلع المربع



Exa

جد نقطة او نقاط تنتمي للقطع الزائد $y^2 - x^2 = 3$ بحيث يكون اقرب ما يمكن للنقطة $(0, 4)$

SOL

$$S = NP = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$S = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 4)^2}$$
$$= \sqrt{(x^2 + y^2 - 8y + 16} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$y^2 - x^2 = 3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$x^2 = y^2 - 3$$

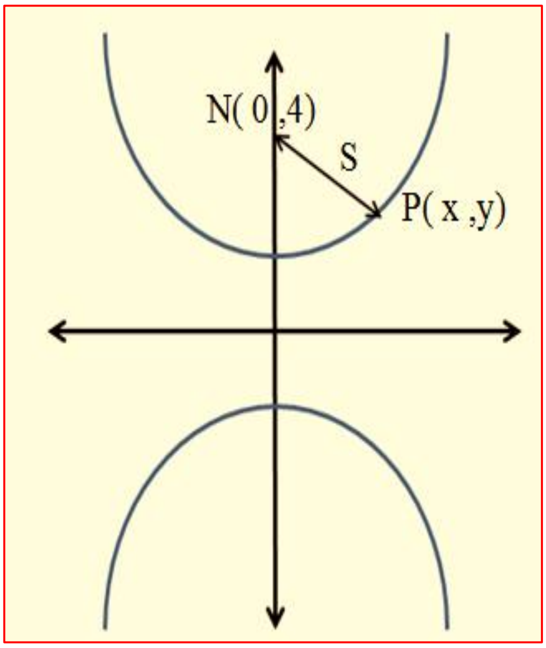
نعوضها في (1)

$$S = \sqrt{y^2 - 3 + y^2 - 8y + 16} = \sqrt{2y^2 - 8y + 13}$$
$$S' = \frac{4y-8}{2\sqrt{y^2-8y+13}}$$

نجعل $S' = 0$

$$\frac{4y-8}{2\sqrt{y^2-8y+13}} = 0 \Rightarrow 4y - 8 = 0 \quad \div 4$$
$$y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2$$

- - - - - - - - - 2 + + + + + +	اشارة S'



∴ للدالة نهاية صغرى محلية عند $y = 2$

$$x^2 = (2)^2 - 3 = 4 - 3$$
$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

النقط $(-1, 2)$ ، $(1, 2)$

Exa

اكبر مستطيل يوضع داخل المنطقة المحددة بالدالة $f(x) = 12 - x^2$ ومحور السينات ، رأسان من رؤوسه على المنحني جد بعدي والرأسان الاخران على محور السينات ثم جد محيطه

SOL

$A = 2xy$ .... (1)

$f(x) = y = 12 - x^2$ .... (2)

$A = 2x(12 - x^2)$ نعوضها في (1)

$A = 24x - 2x^3$

$A' = 24 - 6x^2$

نجعل $A' = 0$

$24 - 6x^2 = 0 \qquad \div 6$

$4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$

اشارة A'

$+ + + + + + \; 2 \; - - - - - - - - -$

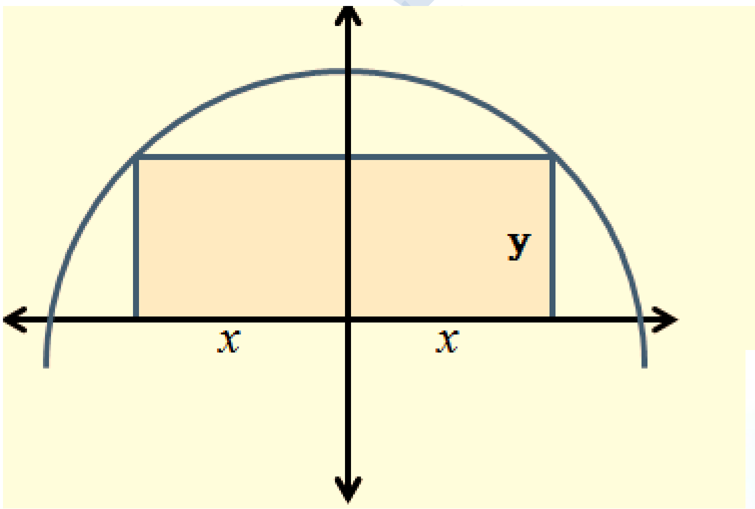
∴ للدالة نهاية عظمى محلية عند $x = 2$

$y = 12 - 4 = 8$

الابعاد : الطول $2x = 2(2) = 4$

العرض $y = 8$

$P = 2(2x + y) = 2(4 + 8) = 24$ وحدة الطول



Exa

جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (6,8) والذي يصنع مع المحورين في الربع الأول اصغر مثلث

SOL

$$A = \frac{1}{2}\, x\, y \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

من التشابه

$$\frac{x-6}{x} = \frac{8}{y} \Rightarrow y\,(x-6) = 8x \Rightarrow y = \frac{8x}{x-6} \qquad \ldots\ldots (2)$$

نعوضها في (1)

$$A = \frac{1}{2}\, x \left(\frac{8x}{x-6} \right) = \frac{4x^2}{x-6}$$

$$A' = \frac{(x-6)\,8x - 4x^2\,(1)}{(x-6)^2} = \frac{8x^2 - 48x - 4x^2}{(x-6)^2} = \frac{4x^2 - 48x}{(x-6)^2}$$

نجعل $A' = 0$

$$\frac{4x^2 - 48x}{(x-6)^2} = 0$$

$$4x^2 - 48x = 0 \quad \div 4 \Rightarrow x^2 - 12x = 0$$

$$x\,(x-12) = 0$$

either $x = 0$ يهمل

or $x - 12 = 0 \Rightarrow x = 12$

اشارة A' - - - - - - 12 + + + + + +

∴ للدالة نهاية صغرى محلية عند $x = 12$

النقاط (6 , 8) , (12 , 0)

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

$$\frac{y-8}{x-6} = \frac{0-8}{12-6}$$

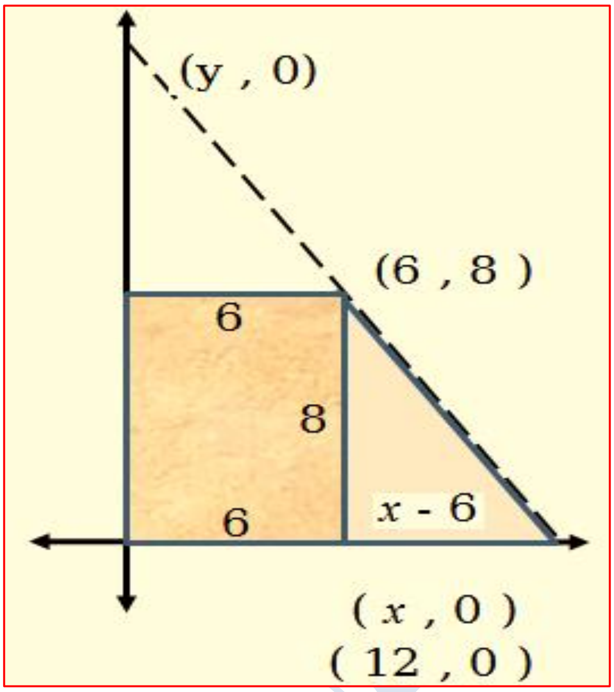
$$\frac{y-8}{x-6} = \frac{-8}{6}$$

$$\frac{y-8}{x-6} = \frac{-4}{3}$$

$$3y - 24 = -4x + 24$$

$$3y - 24 + 4x - 24 = 0$$

معادلة المستقيم　$4x + 3y - 48 = 0$



2017

الرياضيات

السادس العلمي

الاستاذ

حسين عبد زيد خلف

07802543623

الفصل الرابع

التكامل

Integration

الفصل الرابع - التكامل Integration

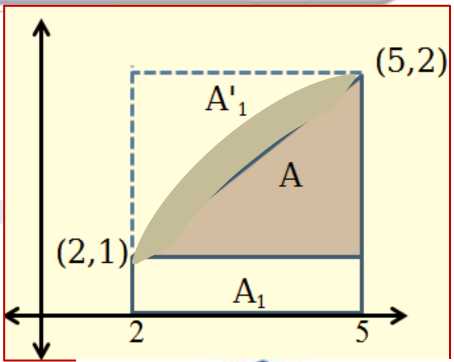
ايجاد القيمة التقريبية لمساحة منطقة مستوية :-

EXA

لتكن $A = \{ (x , y) : 2 \le x \le 5 , y \le \sqrt{x-1} \}$

اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة A

SOL



$A_1 = (5-2)(1) = 3$

$A'_1 = (5-2)(2) = 6$

$$A = \frac{A_1 + A'_1}{2} = \frac{3+6}{2} = \frac{9}{2}$$

$A = 4.5 \text{ unit}^2$

ملاحظات

1. A_1 اكبر منطقة مستطيلة داخل المنطقة A قاعدتها $x=2$ الى $x=5$ وارتفاعها $m=1$ حيث $A_1 \subseteq A$.

2. A'_1 اصغر منطقة مستطيلة خارج المنطقة A قاعدتها $x=2$ الى $x=5$ وارتفاعها $M=2$.

3. $\because A_1 \subseteq A \subseteq A'_1$

$\therefore$ مساحة المنطقة $A_1 \le$ مساحة المنطقة $A \le$ مساحة المنطقة A'_1 .

4. القيمة التقريبية لمساحة A تساوي $A = \dfrac{A_1 + A'_1}{2}$

ملاحظات

1. A_1 هي منطقة مستطيلة التي ارتفاعها يساوي اصغر قيمة للدالة في $[a .b]$ ونرمز لها بالرمز (m)

2. A'_1 هي منطقة مستطيلة التي ارتفاعها يساوي اكبر قيمة للدالة في $[a .b]$ ونرمز لها بالرمز (M)

07802543623

3 m هي اصغر قيمة للدالة المستمرة على [a .b]
و M هي اكبر قيمة للدالة المستمرة على [a .b]
نبحث عنهما عند احد طرفي الفترة [a .b] أو عند النقطة الحرجة ان وجدت .

EXA

لتكن $y = x^2 + 1$ و $A = \{ (x , y) : 1 \le x \le 2$

اوجد القيمة التقريبية لمساحة المنطقة A

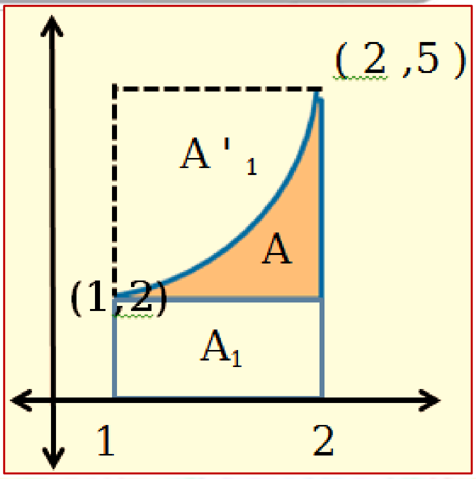
SOL

$A_1 = (2-1)\,(2) = 2$

$A'_1 = (2-1)\,(5) = 5$

$$A = \frac{A_1 + A'_1}{2} = \frac{2+5}{2} = \frac{7}{2}$$

$A = 3.5 \text{ unit}^2$



مساحة منطقة مستوية بدقة اكبر

EXA اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة الآتية

$y = x^2 + 1$ و $A = \{ (x , y) : 2 \le x \le 5$

وذلك باستخدام التجزئة $(2)\ \sigma_2 = (2,3,4,5)$ ، $(1)\ \sigma_1 = (2,3,5)$

SOL

$(1)\ \sigma_1 = (2,3,5) \Rightarrow [2,3] , [3,5]$

$A_1 + A_2 = (3-2)\,5 + (5-3)\,10$

$= 5 + (2)\,10 = 5 + 20 = 25$

$A'_1 + A'_2 = (3-2)\,(10) + (5-3)\,(26)$

$= (1)\,(10) + (2)\,(26)$

$= 10 + 52 = 62$

$$A = \frac{A_1 + A'_1}{2} = \frac{25+62}{2} = \frac{87}{2} = 43.5 \text{ unit}^2$$

$(2)\ \sigma_2 = (2,3,4,5) \Rightarrow [2,3] , [3,4] , [4,5]$

07802543623

$$A_1 + A_2 + A_3 = (3-2)(5) + (4-3)(10) + (5-4)(17)$$
$$= 5 + 10 + 17 = 32$$
$$A'_1 + A'_2 + A'_3 = (3-2)(10) + (4-3)(17) + (5-4)(26)$$
$$= 10 + 17 + 26 = 53$$
$$A = \frac{32+53}{2} = \frac{85}{2} = 42.5 \text{ unit}^2$$

ملاحظات

1 اذا كانت $[a .b]$ واردنا ان نجزئها الى n من الفترات المنتظمة فان طول الفترة $= \frac{b-a}{n}$

2 نلاحظ انه كلما زادت نقاط التجزئ فان الفرق بين مجموع مساحات المناطق المستطيلة داخل A ومجموع مساحات المناطق المستطيلة خارج A يقل تدريجيا فتكون القيمة التقريبية لمساحة المنطقة A تصبح اكثر دقة

المجاميع العليا والمجاميع السفلى

الدالة $f : [a .b] \Rightarrow R$ مستمرة على $[a .b]$

نجد مجموع مساحات المستطيلات داخل المنطقة $A = L(\sigma , f)$

ثم نجد مجموع مساحات المستطيلات خارج المنطقة $A = U(\sigma , f)$

أولا نفرض ان $\forall x \in [a .b]$ ، $f(x) \geq 0$

حيث $\sigma = (x_0 , x_1 , x_2 , x_3 , x_4)$

فتكون مساحة المنطقة المستطيلة A_1 التي قاعدتها محصورة في الفترة $[x_0 , x_1]$

وارتفاعها m_1 تساوي $m_1(x_1 - x_0)$ حيث m_1 (اصغر قيمة للدالة في الفترة)

وهكذا.

$$L(\sigma , f) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + m_3(x_3 - x_2) + m_4(x_4 - x_3)$$

نلاحظ ان $L(\sigma , f) \leq$ مساحة A

مساحة المنطقة المستطيلة A'_1 التي قاعدتها محصورة في الفترة $[x_0 , x_1]$

وارتفاعها M_1 تساوي $M_1(x_1 - x_0)$ حيث M_1 (اكبر قيمة للدالة في الفترة)

وهكذا.

$$U(\sigma , f) = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + M_3(x_3 - x_2) + M_4(x_4 - x_3)$$

نلاحظ ان $U(\sigma , f) \geq L(\sigma , f)$

نلاحظ ان $L(\sigma , f) \leq$ مساحة $A \leq U(\sigma , f)$

∴ أول قيمة تقريبية لمساحة A وفق التجزئة تساوي $\dfrac{L(\sigma ,f)+U(\sigma ,f)}{2}$

ثانيا عندما لا نشترط ان تكون $\forall x \in [a .b]$ ، $f(x) \geq 0$

فانه من الممكن ان يكون **m** (اصغر قيمة ممكنة للدالة) عدد سالب او موجب او صفرا

وبالتالي فانه من المتوقع ان تكون $L(\sigma , f)$ عدد سالب او موجب او صفر

وكذلك $U(\sigma , f)$ عدد سالب او موجب او صفر

∵ العدد السالب لا يقيس مساحة لهذا فإننا نسمي

$L(\sigma , f)$ المجموع الاسفل

$U(\sigma , f)$ المجموع الاعلى

EXA

لتكن $f : [1,4] \Rightarrow R$ $\quad f(x) = 5 + 2x$

جد $L(\sigma , f)$ ، $U(\sigma , f)$ مستخدما ثلاث تجزيئات منتظمة

SOL

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$[1,4] = [1,2] \;,\; [2,3] \;, [3,4]$

$f'(x) = 2 > 0$

∴ لا توجد نقاط حرجة والدالة متزايدة في مجالها

[a ,b]	h طول الفترة	m_i	M_i	$h_i m_i$	$h_i M_i$
[1,2]	1	5+2(1)=7	5+2(2)=9	7	9
[2,3]	1	5+2(2)=9	5+2(3)=11	9	11
[3,4]	1	5+2(3)=11	5+2(4)=13	11	13
				27	33

$L(\sigma , f) = 27$, $\quad U(\sigma , f) = 33$

EXA

اذا كانت $f : [0,4] \Rightarrow R$ $\quad f(x) = 3x - x^2$

جد $L(\sigma , f)$ ، $U(\sigma , f)$ مستخدما اربعة تجزيئات منتظمة

SOL

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$[0,4] = [0,1] \; [1,2] \;,\; [2,3] \;, [3,4]$

$f'(x) = 3 - 2x$

نجعل $f'(x) = 0$

$3 - 2x = 0 \Rightarrow \quad 2x = 3 \quad \Rightarrow x = \frac{3}{2} \in [1,2]$

∴ للدالة نقطة حرجة للفترة $[1,2]$

اشارة $f'(x)$

0	1	$\frac{3}{2}$	2	3	4
[+ + + + + + + +		- - - - - - - - - - - - - - -]			

[a ,b]	hi	m_i	M_i	$h_i m_i$	h_i Mi
[0,1]	1	0	2	0	2
[1,2]	1	2	9 / 4	2	2 1/4
[2,3]	1	0	2	0	2
[3,4]	1	- 4	0	- 4	0
				-2	6 1/4

$L(\sigma ، f) = -2$ $U(\sigma ، f) = 6\frac{1}{4}$

نلاحظ ان $L(\sigma ، f) \leq U(\sigma ، f)$

EXA

او جد كل من $U(\sigma ، f)$ ، $L(\sigma ، f)$ $f : [-2 , 1] \Rightarrow R$

$f(x) = 3 - x$

SOL

$\sigma = (-2 , 0 , 1) = [-2 , 0] , [0 , 1]$

$f'(x) = -1 < 0$

∴ لا توجد نقطة حرجة والدالة متناقصة في مجالها

[a ,b]	h_i	m_i	M_i	$h_i m_i$	h_i Mi
[-2,0]	2	3	5	6	10
[0,1]	1	2	3	2	3
				8	13

$L(\sigma ، f) = 8$ $U(\sigma ، f) = 13$

تقسيم الفترة [1 , -2] الى ثلاث فترات جزئية منتظمة

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-(-2)}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

[-2 , 1] = [-2 , -1] ، [-1 , 0] ، [0 , 1]

[a ,b]	h_i	m_i	M_i	$h_i m_i$	$h_i M_i$
[-1,-2]	1	4	5	4	5
[-1 ,0]	1	3	4	3	4
[0 ,1]	1	2	3	2	3
				9	12

$L(\sigma ، f) = 9$ $U(\sigma ، f) = 12$

07802543623

التكامل

أذا كانت $f:[a,b] \Rightarrow R$ دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ فانه يوجد عدد وحيد K بحيث لاي تجزئ σ للفترة $[a,b]$ فان .

$$L(\sigma , f) \le K \le U(\sigma , f)$$

نسمي العدد K التكامل المحدد للدالة f على $[a,b]$

ونرمز له $\int_a^b f(x)\,dx$ ويقرأ التكامل من a الى b للدالة f

ونسمي a ، b حدي التكامل

ملاحظات

1 اذا كانت f دالة مستمرة على $[a,b]$ فان

$$L(\sigma , f) \le \int_a^b f(x)\,dx \le U(\sigma , f)$$

وتكون القيمة التقريبية للتكامل

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{L(\sigma,f)+U(\sigma,f)}{2}$$

2 اذا كانت $\forall x \in [a,b]$ $\quad f(x) \ge 0$

فان $\int_a^b f(x)\,dx$ يعطي مساحة المنطقة A تحت المنحني f وهو عدد غير سالب

3 اذا كانت $\forall x \in [a,b]$ $\quad f(x) \le 0$

فان $\int_a^b f(x)\,dx \le 0$ وهذا لا يدل على المساحة

اما المساحة تساوي $- \int_a^b f(x)\,dx = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right|$

07802543623

4 ان قيمة $\int_a^b f(x)\,dx$ تتوقف على الفترة $[a,b]$ وعلى الدالة $f(x)$

حيث تشير dx الى حدي التكامل b , a قيمتان للمتغير x

EXA

لتكن $f(x) = x^2$ حيث $f : [1,3] \Rightarrow R$

جد القيمة التقريبية للتكامل $\int_1^3 x^2\,dx$ اذا جزئت الفترة $[1,3]$ الى تجزئتين

f دالة مستمرة على الفترة $[1,3]$ كثيرة الحدود

$f'(x) = 2x$

نجعل $f'(x) = 0$

$2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

∴ للدالة نقطة حرجة عند $x = 0$ وإن $0 \notin [1,3]$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$[1, 3] = [1, 2] ، [2, 3]$

$[a,b]$	h_i	m_i	M_i	$h_i m_i$	$h_i M_i$
$[1,2]$	1	1	4	1	4
$[2,3]$	1	4	9	4	9
				5	13

$L(\sigma ، f) = 5 \qquad U(\sigma ، f) = 13$

$$\int_1^3 x^2\,dx = \frac{L(\sigma,f)+U(\sigma,f)}{2} = \frac{5+13}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

EXA

لتكن $f(x) = 2x - 3$ حيث $f : [2,5] \Rightarrow R$

جد القيمة التقريبية للتكامل $\int_{2}^{5} f(x)\,dx$ باستخدام التجزئة $\sigma(2,3,5)$

ثم تحقق هندسيا .

SOL

$\sigma(2,3,5) = [2,3] \,،\, [3,5]$

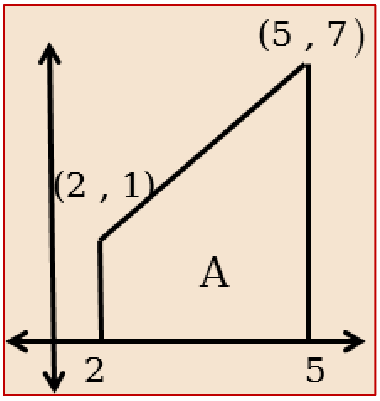
$f'(x) = 2 > 0$

∴ لا توجد نقطة حرجة والدالة متزايدة في مجالها

[a ,b]	h_i	m_i	M_i	$h_i m_i$	$h_i M_i$
[2,3]	1	1	3	1	3
[3,5]	2	3	7	6	14
				7	17

$L(\sigma \,،\, f) = 7 \quad ، \quad U(\sigma \,،\, f) = 17$

$$\int_{2}^{5} f(x)\,dx = \frac{7+17}{2} = \frac{24}{2} = 12$$



مساحة منطقة A = $\frac{1}{2}$ (مجموع طولي القاعدتين المتوازيتين) × الارتفاع

$$A = \frac{1}{2}[1+7](3) = \frac{1}{2}(8)(3) = 12 \text{ unit}^2$$

EXA

جد القيمة التقريبية للتكامل $\int_{1}^{3} \frac{3}{x}\,dx$ باستخدام التجزئة $\sigma(1,2,3)$

SOL

$\sigma(1,2,3) = [1,2] \,،\, [2,3]$

$$f(x) = \frac{3}{x} = 3x^{-1}$$

$$f'(x) = -3x^{-2} = \frac{-3}{x^2}$$

نجعل $f'(x) = 0$ $\frac{-3}{x^2} = 0 \Rightarrow -3 \neq 0$

∴ لا توجد نقطة حرجة والدالة متناقصة في مجالها

[a ,b]	h_i	m_i	M_i	$h_i m_i$	$h_i M_i$
[1,2]	1	3/2	3	3/2	3
[2,3]	1	1	3/2	1	3/2
				2.5	4.5

$$\int_1^3 \frac{3}{x}\, dx = \frac{2.5+4.5}{2} = \frac{7}{2} = 3.5$$

EXA

لتكن $f(x) = 3$ حيث $f : [1, 5] \Rightarrow R$

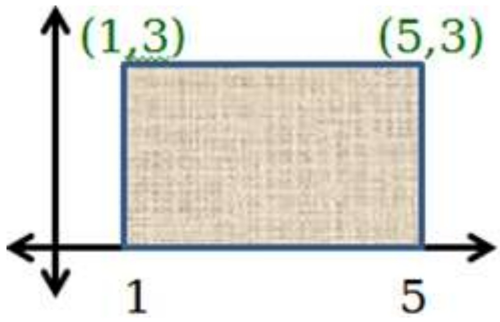
اوجد $\int_1^5 f(x)\, dx$

SOL

[a ,b]	h_i	m_i	M_i	$h_i m_i$	$h_i M_i$
[1,3]	2	3	3	6	6
[3,5]	2	3	3	6	6
				12	12

$$\int_1^5 f(x)\, dx = \frac{12+12}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ unit}^2$$

$A = (5-1)(3) = (4)(3) = 12 \text{ unit}^2$



النظرية الاساسية للتكامل – الدالة المقابلة

إذا كانت f دالة مستمرة على الفترة [a,b] فانه توجد دالة F مستمرة على الفترة [a,b] بحيث

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in (a,b)$$

ويكون

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

تسمى F الدالة المقابلة للدالة f وعلى الفترة [a , b]

Exa

إذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة [1 , 5] بحيث $F(x) = 3x^2$ دالة مقابلة للدالة f فجد $\int_1^5 f(x)\,dx$

Sol

$$\int_1^5 f(x)\,dx = \Big[3x^2\Big]_1^5 = 3(5)^2 - 3(1)^2$$

$$= 75 - 3 = 72$$

Exa

إذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$ وان دالة مقابلة للدالة f هي $F(x) = \sin x$ ، $F: [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow R$ فجد $\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$

Sol

$$\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx = \Big[\sin x\Big]_0^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0$$

$$= 1 - 0 = 1$$

07802543623

اثبت ان $F(x) = x^3+2$ $F \; [1 , 3] \Rightarrow R$ هي

هي دالة مقابلة للدالة $f(x) = 3x^2$

Sol

$\because$ $F(x) = x^3+2$ هي دالة مستمرة و قابلة للاشتقاق على R (لانها كثيرة الحدود)

$\therefore$ F مستمرة على $[1 , 3]$ وقابلة للاشتقاق على $(1 , 3)$.

$$F(x) = x^3+2$$

$$F'(x) = 3x^2 = f(x) \qquad \forall \; x \in (1 , 3)$$

$\therefore$ F دالة مقابلة للدالة f على $[1 , 3]$

Exa

اثبت ان الدالة $F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$ $F : R \Longrightarrow R$

هي دالة مقابلة للدالة $f(x) = \cos 2x$ $f : R \Longrightarrow R$

ثم اوجد $\int_0^{\pi/4} \cos 2x \, dx$

Sol

$\because$ $f(x) = \cos 2x$ $f : R \Longrightarrow R$

الدالة مستمرة وقابلة للاشتقاق على R

$$F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$$

الدالة مستمرة وقابلة للاشتقاق على R

$$F'(x) = \frac{1}{2}\cos 2x\,(2) = \cos 2x = f(x)$$

$\therefore$ F هي دالة مقابلة للدالة f

$$\int_0^{\pi/4} \cos 2x \, dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi/4}$$

$$\frac{1}{2}\sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\sin 2(0) = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin(0)$$

$$\frac{1}{2}(1) - \frac{1}{2}(0) = \frac{1}{2}$$

اثبت ان الدالة $F(x)$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)$

حيث $F:[0,\frac{\pi}{6}] \Rightarrow R$ ، $F(x)=\sin x + x$

$f(x)=1+\cos x$ حيث $f:[0,\frac{\pi}{6}] \Rightarrow R$ ، $\int_0^{\pi/6} f(x)dx$

Sol

$f:[0,\frac{\pi}{6}] \Rightarrow R$ ، $f(x)=1+\cos x$

الدالة مستمرة وقابلة للاشتقاق على $[0,\frac{\pi}{6}]$

$F(x)=\sin x + x$

الدالة مستمرة وقابلة للاشتقاق على R

$F'(x)=\cos x+1 = f(x)$

$\therefore$ F هي دالة مقابلة للدالة f

$$\int_0^{\pi/6} f(x)dx = \int_0^{\pi/6}(1+\cos x)dx = [\sin x + x]_0^{\pi/6}$$

$$\sin\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6} - (\sin 0 + 0) = \frac{1}{2}+\frac{\pi}{6}$$

جدول يبين الدالة والدالة المقابلة

الدالة $f(x)$	الدالة المقابلة لها $F(x)$
a	$a\,x$
x^{n} $n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$a\,x^{n}$ $n \neq -1$	$\frac{a\,x^{n+1}}{n+1}$
$[f(x)]^{n} \cdot f'(x)$ $n \neq -1$	$\frac{f(x)]^{n+1}}{n+1}$
$\sin(ax+b)$	$\frac{-1}{a}\cos(ax+b)$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$
$\sec^{2}(ax+b)$	$\frac{1}{a}\tan(ax+b)$
$\csc^{2}(ax+b)$	$\frac{-1}{a}\cot(ax+b)$
$\sec ax \cdot \tan ax$	$\frac{1}{a}\sec ax$
$\csc ax \cdot \cot ax$	$\frac{-1}{a}\csc ax$

07802543623

اوجد كل من التكاملات التالية

1 $\int_{0}^{\pi/4} \sec^{2} x \, dx = [\tan x]_{0}^{\pi/4} = \tan\frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1 - 0 = 1$

2 $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc^{2} x \, dx = [-\cot x]_{\pi/4}^{\pi/2} = -(\cot\frac{\pi}{2} - \cot\frac{\pi}{4}) = -(0-1) = 1$

3 $\int_{0}^{\pi/3} \sec x . \tan x \, dx = [\sec x]_{0}^{\pi/3} = \sec\frac{\pi}{3} - \sec 0 = 2 - 1 = 1$

4 $\int_{1}^{3} x^{3} \, dx = [\frac{x^4}{4}]_{1}^{3} = [\frac{(3)^4}{4} - \frac{(1)^4}{4}] = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = 20$

5 $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin x \, dx = [-\cos x]_{\pi/6}^{\pi/3} = (-\cos\frac{\pi}{3}) - (-\cos\frac{\pi}{6})$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

07802543623

خواص التكامل المحدد

خواص التكامل المحدد 1A

f دالة مستمرة على $[a , b]$ فاذا كانت

$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a , b]$ فان $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

Exa 1

$f(x) = x^2 \geq 0 \quad \forall x \in [-1 , 2]$ لان $\int_{-1}^{2} x^2\,dx \geq 0$

$$\int_{-1}^{2} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \frac{(2)^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = \frac{9}{3} = 3 > 0$$

Exa 2

$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [-2 , 3]$ لان $\int_{-2}^{3} 3\,dx \geq 0$

$$\int_{-2}^{3} 3\,dx = [3x]_{-2}^{3} = [3(3)] - 3(-2) = 9 + 6 = 15 > 0$$

Exa 3

$f(x) = (x+1) \geq 0 \quad \forall x \in [2 , 3]$ لان $\int_{2}^{3} (x+1)\,dx \geq 0$

$$\int_{2}^{3} (x+1)\,dx = \left[\frac{(x+1)^2}{2}\right]_{2}^{3} = \frac{(3+1)^2}{2} - \frac{(2+1)^2}{2} = \frac{16}{2} - \frac{9}{2} = \frac{7}{2} > 0$$

07802543623

f دالة مستمرة على $[a , b]$ فاذا كانت $f(x) \leq 0 , \quad \forall x \in [a,b]$

فان $\int_a^b f(x)\, dx \leq 0$

Exa 1

$\int_1^2 -2dx > 0$ لان $f(x) \leq 0 , \quad \forall x \in [1,2]$

$$\int_1^2 -2dx = [-2x]_1^2 = [-2(2)] - [-2(1)] = -4 + 2 = -2 < 0$$

Exa 2

$\int_1^2 xdx \leq 0$ لان $f(x) \leq 0 , \quad \forall x \in [-2,-1]$

$$\int_{-2}^{-1} xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{-1} = \left[\frac{(-1)^2}{2}\right] - \left[\frac{(-2)^2}{2}\right] = \frac{1}{2} - \frac{4}{2} = \frac{-3}{2} > 0$$

2 خواص التكامل المحدد

f دالة مستمرة على $[a , b]$ ، C عدداً حقيقياً ثابتاً فان

$$\int_a^b c . f(x)dx = c \int_a^b f(x)dx$$

Exa

أذا كان $\int_2^5 f(x)dx = 8$ فأوجد $\int_2^5 5 . f(x)dx$

$$\int_2^5 5 . f(x)dx = 5 \int_2^5 f(x)dx = 5\,(8) = 40$$

07802543623

3 خواص التكامل المحدد

اذا كانت الدالتان f_2 f_1 مستمرتين على الفترة $[a, b]$ فان

$$\int_a^b (f_1 \mp f_2)\,dx = \int_a^b f_1\,dx \mp \int_a^b f_2\,dx$$

Exa اذا كانت $\int_1^3 f_2(x)\,dx = 17$ ، $\int_1^3 f_1(x)\,dx = 15$ اوجد كل من

1 $\int_1^3 [f_1(x) + f_2(x)]\,dx$ **2** $\int_1^3 [f_1(x) - f_2(x)]\,dx$

1 $\int_1^3 [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \int_1^3 f_1(x)\,dx + \int_1^3 f_2(x)\,dx$

$= 15 + 17 = 32$

2 $\int_1^3 [f_1(x) - f_2(x)]\,dx = \int_1^3 f_1(x)\,dx - \int_1^3 f_2(x)\,dx$

$= 15 - 17 = -2$

Exa اذا كانت $f(x) = 3x^2 + 2x$ فأوجد $\int_1^2 f(x)\,dx$

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 (3x^2 + 2x)\,dx = \left[\frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}\right]_1^2$$

$$= \left[x^3 + x^2\right]_1^2 = [(2)^3 + (2)^2] - [(1)^3 + (1)^2]$$

$$= (8 + 4) - (1 + 1) = 12 - 2 = 10$$

جد التكاملات الآتية

1 $\int_1^4 (x-2)^2 (x+1)\, dx$

Sol $\int_1^4 (x^2 - 4x + 4)(x+1)\, dx$

$\int_1^4 (x^3 + x^2 - 4x^2 - \cancel{4x} + \cancel{4x} + 4)\, dx = \int_1^4 (x^3 - 3x^2 + 4)\, dx$

$= [\frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + 4x]_1^4 = [\frac{x^4}{4} - x^3 + 4x]_1^4$

$= [\frac{(4)^4}{4} - (4)^3 + 4(4)] - [\frac{(1)^4}{4} - (1)^3 + 4(1)]$

$= (\cancel{64} - \cancel{64} + 16) - (\frac{1}{4} - 1 + 4)$

$= 16 - \frac{1}{4} + 3 = 13 - \frac{1}{4} = \frac{52-1}{4} = \frac{51}{4}$

2 $\int_1^2 \frac{x^2-1}{x-1}\, dx$

Sol $\int_1^2 \frac{x^2-1}{x+1}\, dx = \int_1^2 \frac{(x+1)(x-1)}{x+1}\, dx = \int_1^2 (x-1)\, dx$

$= [\frac{x^2}{2} - x]_1^2 = [\frac{(2)^2}{2} - 2] - [\frac{(1)^2}{2} - 1]$

$= (2-2) - (\frac{1}{2} - 1) = 0 - (\frac{1}{2} - 1) = \frac{1}{2}$

3 $\int_1^3 \frac{2x^3-4x^2+5}{x^2}\, dx$

Sol $= \int_1^3 (2x^3 - 4x^2 + 5)\, x^{-2}\, dx$

07802543623

$$= \int_{1}^{3} (2x - 4 + 5x^{-2})\, dx$$

$$= \left[\frac{2x^2}{2} - 4x + \frac{5x^{-1}}{-1} \right]_1^3 = \left[x^2 - 4x - \frac{5}{x} \right]_1^3$$

$$= \left[(3)^2 - 4(3) - \frac{5}{3} \right] - \left[(1)^2 - 4(1) - \frac{5}{1} \right]$$

$$= \left[9 - 12 - \frac{5}{3} \right] - \left[1 - 4 - 5 \right]$$

$$= \left(-3 - \frac{5}{3} \right) - (-8)$$

$$= -3 - \frac{5}{3} + 8 = 5 - \frac{5}{3} = \frac{15-5}{3} = \frac{10}{3}$$

4 خواص التكامل المحدد

اذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة على الفترة $[a, b]$ وكانت $c \in [a, b]$ فان

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Exa

اذا كانت $\int_3^7 f(x)\,dx = 8$ ، $\int_1^3 f(x)\,dx = 5$ فاوجد $\int_1^7 f(x)\,dx$

Sol

$$\int_1^7 f(x)\,dx = \int_1^3 f(x)\,dx + \int_3^7 f(x)\,dx$$

$$= 5 + 8 = 13$$

Exam

اذا كانت $\int_a^b f(x)\,dx = 5$ ، $\int_c^b f(x)\,dx = 3$ وكانت $c \in (a, b)$

فجد $\int_a^c f(x)\,dx$

Sol

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$5 = \int_a^c f(x)\,dx + 3 \Rightarrow 5 - 3 = \int_a^c f(x)\,dx$$

$$\int_a^c f(x)\,dx = 2$$

Exam

لتكن $f(x) = |x|$ اوجد $\int_{-3}^{4} f(x)\,dx$

Sol

f دالة مستمرة على $[-3, 4]$

$$f(x) = |x| \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$\int_{-3}^{4} f(x)\,dx = \int_{-3}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{4} x\,dx$$

$$= \left[\frac{-x^2}{2}\right]_{-3}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{4} = \left[0 - \frac{-(-3)^2}{2}\right] + \left[\frac{(4)^2}{2} - 0\right]$$

$$\frac{9}{2} + \frac{16}{2} = \frac{25}{2}$$

Exam

اوجد $\int_{-1}^{5} |x-3|\,dx$

Sol

دالة مستمرة على $[-1, 5]$

$$f(x) = |x| \begin{cases} x - 3 & x \geq 3 \\ -(x-3) & \\ 3 - x & x < 3 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{5} |x - 3|\,dx = \int_{-1}^{3} (3-x)\,dx + \int_{3}^{5} (x-3)\,dx$$

$$= \left[3x - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{3} + \left[\frac{x^2}{2} - 3x \right]_{3}^{5}$$

$$= [3(3) - \frac{(3)^2}{2}] - [3(-1) - \frac{(-1)^2}{2}] + [\frac{(5)^2}{2} - (3)5] - [\frac{(3)^2}{2} - 3(3)]$$

$$= [(9 - \frac{9}{2}) - (-3 - \frac{1}{2})] + [(\frac{25}{2} - 15) - (\frac{9}{2} - 9)]$$

$$= [9 - \frac{9}{2} + 3 + \frac{1}{2}] + [\frac{25}{2} - 15 - \frac{9}{2} + 9]$$

$$= [12 - \frac{8}{2}] + [\frac{16}{2} - 6] = 12 - 4 + 8 - 6 = 10$$

Exam

اذا كانت $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \geq 1 \\ 3 & x < 1 \end{cases}$ فأوجد $\int_0^5 f(x)\,dx$

Sol

الاستمرارية عند $x = 1$

1. معرفة $f(1) = 2(1) + 1 = 3 \in R$

الغاية من اليمين

2. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (2x+1) = 2(1)+1 = 3 = L_1$

الغاية من اليسار

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} 3 = 3 = L_2$

$\because L_1 = L_2$ $\therefore$ توجد غاية عند $x = 1$

$\therefore \lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

$\because$ الدالة مستمرة على كل من $\{x : x > 1\}$, $\{x : x < 1\}$

$\therefore$ الدالة مستمرة على $[0, 5]$

$$\int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^1 3\,dx + \int_1^5 (2x+1)\,dx$$

$$= [\, 3x \,]_0^1 + [\, \frac{2x^2}{2} + x \,]_1^5 = [3\,(1) - 3\,(0)\,] + \,[(5)^2 + 5] - [(1)^2 + 1]$$

$$= 3 + 25 + 5 - 2 = 31$$

5 خواص التكامل المحدد

A $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

B $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

Exam

1 $\int_3^3 x\,dx = [\,\frac{x^2}{2}\,]_3^3 = \frac{9}{2} - \frac{9}{2} = \frac{0}{2} = 0$

2 $\int_3^2 3x^2\,dx = -\int_2^3 3x^2\,dx = -[\,\frac{3x^3}{3}\,]_2^3 = -[\,x^3\,]_2^3$

$$= -[\,(3)^3 - (2)^3\,] = -[\,27 - 8\,] = -19$$

Exam احسب كلاً من التكاملات الآتية

1

$$\int_1^2 (x^{-2} + 2x + 1)\,dx = [\,\frac{x^{-1}}{-1} + \frac{2x^2}{2} + x\,]_1^2$$

$$[\frac{-1}{x} + x^2 + x\,]_1^2 = [\frac{-1}{2} + 4 + 2] - [\frac{-1}{1} + 1 + 1]$$

$$= \frac{-1}{2} + 6 - 1 = \frac{-1}{2} + 5 = \frac{-1+10}{2} = \frac{9}{2}$$

2

$$\int_{-1}^{1} \frac{(x^2 - x)^3}{x^3}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{[x\,(x-1)]^3}{x^3}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{x^3(x-1)^3}{x^3}\,dx$$

$$\int_{-1}^{1} (x-1)^3\,dx = \left[\frac{(x-1)^4}{4}\right]_{-1}^{1} = \left[\frac{(1-1)^4}{4} - \frac{(-1-1)^4}{4}\right] \qquad \boxed{\begin{matrix} m = x-1 \\ m' = 1 \end{matrix}}$$

$$= 0 - \frac{(-2)^4}{4} \quad = -\frac{(-2)^4}{4} \quad = -\frac{16}{4} \quad = -4$$

3 $\displaystyle\int_{3}^{2} \frac{x^3-1}{x-1}\,dx = \int_{3}^{2} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}\,dx$

$$= \int_{3}^{2} (x^2+x+1)\,dx = -\int_{2}^{3} (x^2+x+1)\,dx$$

$$\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right]_{2}^{3} = -\left[\left(\frac{27}{3} + \frac{9}{2} + 3\right) - \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 2\right)\right]$$

$$= -\left[\left(9 + \frac{9}{2} + 3\right) - \left(\frac{8}{3} + 2 + 2\right)\right] = -\left[12 + \frac{9}{2} - 4 - \frac{8}{3}\right]$$

$$= -\left[8 + \frac{9}{2} - \frac{8}{3}\right] = -8 - \frac{9}{2} + \frac{8}{3} = \frac{-48-27+16}{6} = \frac{-59}{6}$$

4 $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{x}\,(\sqrt{x}+2)^2\,dx = \int_{0}^{1} \sqrt{x}\,(x + 4\sqrt{x} + 4)\,dx$

$$= \int_{0}^{1} (x\sqrt{x} + 4x + 4\sqrt{x})\,dx = \int_{0}^{1} \left(x^{\frac{3}{2}} + 4x + 4x^{\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{4x^2}{2} + \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{1} = \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2x^2 + \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{1}$$

$$= \left[\frac{2}{5}(1)^{\frac{5}{2}} + 2(1)^2 + \frac{8}{3}(1)^{\frac{3}{2}}\right] - (0) = \frac{2}{5} + 2 + \frac{8}{3}$$

07802543623

$$= \frac{6+30\ \ 40}{15} = \frac{76}{15}$$

Exam

احسب كلاً من التكاملات الآتية

$$\int [f(x)]^n f'(x)\, dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}$$

1

$$\int_0^3 \left(\sqrt[3]{(3x-1)^2}\right) dx = \int_0^3 (3x-1)^{\frac{2}{3}} dx = \frac{1}{3}\int_0^3 (3x-1)^{\frac{2}{3}} (3)\ dx$$

$$\frac{1}{3}\left[\frac{(3x-1)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\right]_0^3 = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{5}\right)\left[(3x-1)^{\frac{5}{3}}\right]_0^3$$

$m = 3x - 1$
$m' = 3$

$$= \frac{1}{5}\left[(3(3)-1)^{\frac{5}{3}} - (3(0)-1)^{\frac{5}{3}}\right] = \frac{1}{5}\left[(9-1)^{\frac{5}{3}} - (-1)^{\frac{5}{3}}\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left[(8)^{\frac{5}{3}} - (-1)\right] = \frac{1}{5}\left[(2^3)^{\frac{5}{3}} + 1)\right] = \frac{1}{5}\left[(2)^5 + 1)\right]$$

$$= \frac{1}{5}(32+1) = \frac{33}{5}$$

2

$$\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}\, dx = \int_0^4 \frac{x}{(9+x^2)^{\frac{1}{2}}}\, dx = \int_0^4 x(9+x^2)^{\frac{-1}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^4 2x(9+x^2)^{\frac{-1}{2}} dx = \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\left[\frac{(9+x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}}\right]_0^4$$

$m = 9 + x^2$
$m' = 2x$

$$= \left[(9+x^2)^{\frac{1}{2}}\right]_0^4 = [9+(4)^2]^{\frac{1}{2}} - [9+0]^{\frac{1}{2}}$$

$$= [\,9+16\,]^{\frac{1}{2}} - [\,9\,]^{\frac{1}{2}} = [\,25\,]^{\frac{1}{2}} - [\,9\,]^{\frac{1}{2}}$$

$$= 5 - 3 = 2$$

3

$$\int_{-1}^{1} \sqrt[3]{3x^3 - 2x^5}\, dx = \int_{-1}^{1} (3x^3 - 2x^5)^{\frac{1}{3}}\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} [\,x^3(3 - 2x^2)]^{\frac{1}{3}}\, dx = \int_{-1}^{1} (x^3)^{\frac{1}{3}} (3 - 2x^2)^{\frac{1}{3}}\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} x\,(3 - 2x^2)^{\frac{1}{3}}\, dx = \frac{-1}{4}\int_{-1}^{1} -4x\,(3+2x^2)^{\frac{1}{3}}\, dx$$

$$= \frac{-1}{4}\left[\frac{(3-2x^2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right]_{-1}^{1} = \frac{-1}{4}\times\frac{3}{4}\left[(3-2x^2)^{\frac{4}{3}}\right]_{-1}^{1}$$

$$\frac{-3}{16}\left[(3-2)^{\frac{4}{3}} - (3-2)^{\frac{4}{3}}\right] = \frac{-3}{16}(1-1) = 0$$

Exam

اذا كان $\int_{2}^{b} (x+2)\, dx = 10$ جد قيمة b

Sol

$$\int_{2}^{b} (x+2) + dx = 10$$

$$\left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_2^b = 10 \Rightarrow \left(\frac{b^2}{2} + 2b\right) - \left[\frac{4}{2} + 4\right] = 10$$

$$\left(\frac{b^2}{2} + 2b\right) - 6 = 10 \Rightarrow \left(\frac{b^2}{2} + 2b\right) - 16 = 0 \quad \times 2$$

$$b^2 + 4b - 32 = 0$$

$$(b+8)\,(b-4) = 0$$

either $(b+8) = 0 \Rightarrow b = -8$

or $(b-4) = 0 \Rightarrow b = 4$

Exam

اذا كان $\int_{a}^{4} 3x\sqrt{x^2+9}\,dx = 0$ جد قيمة a

Sol

$$\int_{a}^{4} 3x\sqrt{x^2+9}\,dx = 0 \Rightarrow \int_{a}^{4} 3x\,(x^2+9)^{\frac{1}{2}}\,dx = 0$$

$$\frac{3}{2}\int_{a}^{4} 2x\,(x^2+9)^{\frac{1}{2}}\,dx = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}\left[\frac{(x^2+9)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{a}^{4} = 0$$

$$\left[(x^2+9)^{\frac{3}{2}}\right]_{a}^{4} = 0 \Rightarrow (16+9)^{\frac{3}{2}} - (a^2+9)^{\frac{3}{2}} = 0$$

$$(25)^{\frac{3}{2}} = (a^2+9)^{\frac{3}{2}}$$

$$(25) = (a^2+9)$$

$$a^2 = 25-9 = 16$$

$$a = \pm 4$$

Exam

اوجد كلاً من التكاملات الآتية

1

$$\int_{\frac{-\pi}{2}}^{0} (x+\cos x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + \sin x\right]_{\frac{-\pi}{2}}^{0}$$

$$= [0+\sin 0] - \left[\frac{(-\frac{\pi}{2})^2}{2} + \sin\frac{-\pi}{2}\right] = 0 - \left[\frac{\frac{\pi^2}{4}}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= -\left[\frac{\pi^2}{8} - 1\right] = 1 - \frac{\pi^2}{8}$$

2

$$\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -\left[\cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{-\pi}{2}\right]$$

$$= -[0-0] = 0$$

3

$$\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \left[\sin x \right]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{-\pi}{2}$$

$$= \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} = 1 + 1 = 2$$

4

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos^2 x} \, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, . \sec^2 x \, dx$$

$$\boxed{\begin{array}{l} m = \tan x \\ m' = \sec^2 x \end{array}}$$

$$= \left[\frac{\tan^2 x}{2} \right]_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \left[\frac{\tan^2 \frac{\pi}{4}}{2} - \frac{\tan^2 0}{2} \right] = \left[\frac{(1)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2} \right] = \frac{1}{2}$$

5

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^3 x} \, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos^{-3} x \, . \sin x \, dx = - \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} - \cos^{-3} x \sin x \, dx$$

$$\boxed{\begin{array}{l} m = \cos x \\ m' = - \sin x \end{array}}$$

$$= - \left[\frac{\cos^{-2} x}{-2} \right]_{0}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\cos^2 x} \right]_{0}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{3}} - \frac{1}{\cos^2 0} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(\frac{1}{2})^2} - \frac{1}{(1)^2} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\frac{1}{4}} - 1 \right]$$

$$= \frac{1}{2} [4 - 1] = \frac{3}{2}$$

التكامل غير المحدد

اذا كانت الدالة f المستمرة على $[a ,b]$ دالة مقابلة F فانه يوجد عدد لا نهائي من الدوال المقابلة للدالة f كل منها تكون من الصورة $F + c$ حيث c عددا ثابتا والفرق بين اي اثنين منها يساوي عددا ثابتا

ملاحظة

تسمى مجموعة الدوال المقابلة التي تكون على الصورة $F + c$ بالتكامل غير المحدد للدالة f المستمرة على $[a ,b]$ ويرمز لها بالرمز

$$\int f\ (x)\ dx$$ اذا كان رمز المتغير x

$$\int f\ (x)\ dx = F(x) + c \quad , \quad c \in R$$ عددا ثابتا

Exam اوجد كلاً من التكاملات الآتية

1. $$\int (3x^2 + 2x + 1)\ dx = \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + x + c$$
$$= x^3 + x^2 + x + c$$

2. $$\int 3x^{-4} + x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^2 - 2)\ dx = \frac{3x^{-3}}{-3} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3} - 2x + C$$
$$= \frac{-1}{x^3} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{9}.x^3 - 2x + c$$

3. $$\int (\sqrt{x} + \frac{3}{x^4} + 5)\ dx = \int (x^{\frac{1}{2}} + 3x^{-4} + 5)\ dx$$
$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{3x^{-3}}{-3} + 5x + c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{x^3} + 5x + c$$

4. $$\int dx = x + c$$

5 $\int \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int \frac{2}{x^{\frac{2}{3}}}\,dx = \int 2\,x^{\frac{-2}{3}}\,dx$

$= 2\,\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + c = 2\,(3)\,x^{\frac{1}{3}} + c = 6\,x^{\frac{1}{3}} + c$

6 $\int \frac{3}{x\sqrt[4]{x}}\,dx = \int \frac{3}{x.x^{\frac{1}{4}}}\,dx = \int \frac{3}{x^{\frac{5}{4}}}\,dx = \int 3\,x^{\frac{-5}{4}}\,dx$

$= 3\,\frac{x^{\frac{-1}{4}}}{\frac{-1}{4}} + c = \frac{-12}{x^{\frac{1}{4}}} + c = \frac{-12}{\sqrt[4]{x}} + c$

7 $\int (x^2 - 2)^2\,dx = \int (x^4 - 4x^2 + 4)\,dx$

$= \frac{x^5}{5} - \frac{4x^3}{3} + 4x + c$

8 $\int \frac{(x+3)^2}{x^5}\,dx = \int \frac{x^2 + 6x + 9}{x^5}\,dx = \int (x^2 + 6x + 9)\,x^{-5}\,dx$

$= \int (x^{-3} + 6x^{-4} + 9x^{-5})\,dx$

$= \frac{x^{-2}}{-2} + \frac{6x^{-3}}{-3} + \frac{9x^{-4}}{-4} + c$

$= \frac{-1}{2x^2} - \frac{2}{x^3} - \frac{9}{4x^4} + c$

9 $\int \frac{x^2 - 4x + 3}{x^4 - x^3}\,dx = \int \frac{(x-1)(x-3)}{x^3(x-1)}\,dx = \int \frac{(x-3)}{x^3}\,dx$

$= \int (x - 3)\,x^{-3}\,dx = \int (x^{-2} - 3x^{-3})\,dx$

$$= \frac{x^{-1}}{-1} - \frac{3x^{-2}}{-2} + c = \frac{-1}{x} + \frac{3}{2x^2} + c$$

10 $\int \frac{x - 5\sqrt{x} + 6}{x - 2\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}\, dx = \int \frac{(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}}\, dx$

$= \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{x}}\, dx = \int (1 - \frac{3}{x^{\frac{1}{2}}})\, dx = \int (1 - 3x^{\frac{-1}{2}})\, dx$

$= x - \frac{3x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = - x - 6x^{\frac{1}{2}} + c = - x - 6\sqrt{x} + c$

07802543623

تكامل مشتقة دالة الدالة

$$\int [f(x)]^n f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$$

Exam

اوجد كلاً من التكاملات الآتية

1) $\int (x^2+3)^2 (2x)\,dx = \frac{(x^2+3)^3}{3} + c$

$m = x^2+3$
$m' = 2x$

2) $\int (3x^2+8x+5)^6 (3x+4)\,dx$

$= \frac{1}{2}\int (3x^2+8x+5)^6\, 2(3x+4)\,dx$

$= \frac{1}{2}\,\frac{(3x^2+8x+5)^7}{7}$

$= \frac{1}{14}(3x^2+8x+5)^7 + c$

$m = 3x^2+8x+5$
$m' = 6x+8$
$m' = 2(3x+4)$

3) $\int (\sqrt[3]{x^2+10x+25}\,dx$

$= \int (\sqrt[3]{(x+5)^2}\,dx = \int (x+5)^{\frac{2}{3}}\,dx$

$= \frac{(x+5)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + c = \frac{3}{5}\left(\sqrt[3]{(x+5)^5}\right) + c$

$m = x+5$
$m' = 1$

4) $\int \frac{x}{(3x^2+5)^4}\,dx = \int x\,(3x^2+5)^{-4}\,dx$

$= \frac{1}{6}\int 6x\,(3x^2+5)^{-4}\,dx$

$m = 3x^2+5$
$m' = 6x$

$$= \frac{1}{6}\ \frac{(\ 3x^2 + 5\ )^{-3}}{-3} + c \quad = \frac{-1}{18}\ \frac{1}{(3x^2\ + 5\ )^3} + c$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}\ +3}{\sqrt[3]{x^2}}\ dx = \int \frac{(x^{\frac{1}{3}}+3)}{x^{\frac{2}{3}}}\ dx = \int (\ x^{\frac{1}{3}} + 3)\ x^{\frac{-2}{3}}\ \ dx$$

$$m = x^{\frac{1}{3}}\ +3$$

$$m' = \frac{1}{3}\ x^{\frac{-2}{3}}$$

$$= 3\int (\ x^{\frac{1}{3}} + 3)\ .\ \frac{1}{3}\ x^{\frac{-2}{3}}\ \ dx$$

$$= \ 3\ \frac{(x^{\frac{1}{3}}+3\ )^2}{2} + c \ = \frac{3}{2}\ (\ \sqrt[3]{x}\ +3\ )^{\ 2} + c$$

6 $$\int \frac{(3-\sqrt{5x})^7}{\sqrt{7x}}\ dx = \int \frac{(3-\sqrt{5x})^7}{\sqrt{7}.\ \sqrt{x}}\ dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}}\ .\ \frac{-2}{\sqrt{5}}\ \int \frac{(3-\sqrt{5x})^7}{\sqrt{x}}\ \frac{-\sqrt{5}}{2}\ dx$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{35}}\ .\ \frac{(3-\sqrt{5x})^8}{8} + c$$

$$= \frac{-1}{4\sqrt{35}}\ (3 - \ \sqrt{5x})^8\ + c$$

$$m = 3 - \sqrt{5x}$$

$$m' = \frac{-\ 5}{2\sqrt{5x}} = \frac{-\ \sqrt{5}\ \sqrt{5}}{2\sqrt{5}\ \sqrt{x}} = \frac{-\ \sqrt{5}}{2\ \sqrt{x}}$$

7 $$\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}\ -x}}{\sqrt[4]{x^3}}\ dx = \int \frac{\sqrt{\sqrt{x}\ (1-\sqrt{x}\ )}}{\sqrt[4]{x^3}}\ dx$$

$$= \int \frac{\left[\ x^{\frac{1}{2}}(\ 1- x^{\frac{1}{2}})\ \right]^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}}\ dx \ = \int \frac{(x^{\frac{1}{2}}\ )^{\frac{1}{2}}(\ 1- x^{\frac{1}{2}})^{\ \frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}}\ dx$$

$$= \int x^{\frac{1}{4}}\ (1 - x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} .\ x^{\frac{-3}{4}}\ \ dx \ = \int x^{\frac{-2}{4}}\ (1 - x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\ \ dx$$

$$= -2 \int \frac{-1}{2} x^{\frac{-1}{2}} (1 - x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \; dx$$

$m = 1 - x^{\frac{1}{2}}$

$m' = \frac{-1}{2} x^{\frac{-1}{2}}$

$$= -2 \cdot \frac{(1 - x^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c \qquad = \frac{-4}{3} \sqrt{(1 - \sqrt{x})^3} + c$$

8 $\int (x^2 + 2x + 7)^{\frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} \, dx$

$$= \int (x^2 + 2x + 7)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2(x^2 - 1)}{x - 1}\right) dx$$

$$= \int (x^2 + 2x + 7)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2(x + 1)(x - 1)}{x - 1}\right) dx$$

$$= \int (x^2 + 2x + 7)^{\frac{1}{2}} (2x + 2) \, dx$$

$m = x^2 + 2x + 7$

$m' = 2x + 2$

$$= \frac{(x^2 + 2x + 7)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c \qquad = \frac{2}{3} (x^2 + 2x + 7)^{\frac{3}{2}} + c$$

9 $\int (x \sqrt[3]{x^6 + 2x^3} \, dx = \int (x \sqrt[3]{x^3(x^3 + 2)} \, dx$

$$= \int (x \sqrt[3]{x^3} \sqrt[3]{x^3 + 2}) \, dx$$

$$= \int (x\, x \sqrt[3]{x^3 + 2}) \, dx = \int (x^2 (x^3 + 2)^{\frac{1}{3}} \, dx$$

$$= \frac{1}{3} \int 3 \; x^2 (x^3 + 2)^{\frac{1}{3}} \, dx$$

$$= \frac{1}{3} \frac{(x^3 + 2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c \qquad = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} (x^3 + 2)^{\frac{4}{3}} + c$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt[3]{(x^3 + 2)^4} + c$$

07802543623

10 $$\int \frac{(x^3 - 5x)^5}{x^4}\,dx = \int \frac{\left[x(x^2-5)\right]^5}{x^4}\,dx$$

$$= \int \frac{x^5(x^2-5)^5}{x^4}\,dx = \int x(x^2-5)^5\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int 2x(x^2-5)^5\,dx \qquad \boxed{\begin{array}{l} m = x^2 - 2 \\ m' = 2x \end{array}}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(x^2-5)^6}{6} + c = \frac{1}{12}(x^2-5)^6 + c$$

11 $$\int x(x^4 - 2x^2 + 1)^{\frac{2}{5}}\,dx = \int x\left[(x^2-1)^2\right]^{\frac{2}{5}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int 2x(x^2-1)^{\frac{4}{5}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(x^2-1)^{\frac{9}{5}}}{\frac{9}{5}} + c = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9}(x^2-1)^{\frac{9}{5}} + c$$

$$= \frac{5}{18}(x^2-1)^{\frac{9}{5}} + c$$

12 $$\int (x^2-1)^{\frac{1}{3}}(x^3 - x)\,dx = \int (x^2-1)^{\frac{1}{3}}\,x(x^2-1)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (x^2-1)^{\frac{4}{3}}\,2x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(x^2-1)^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} + c = \frac{3}{14}(x^2-1)^{\frac{7}{3}} + c$$

13 $$\int \frac{2x+6}{(x+3)^6}\,dx = \int \frac{2(x+3)}{(x+3)^6}\,dx = \int \frac{2}{(x+3)^5}\,dx$$

07802543623

$$= \int 2(x+3)^{-5}\, dx = 2\,\frac{(x+3)^{-4}}{-4} + c = \frac{-1}{2(x+3)^{4}} + c$$

تكامل الدوال الدائرية

Exam

جد التكاملات الآتية

1) $\int (\cos x + x^{-2})\, dx = \sin x + \frac{x^{-1}}{-1} + c$

2) $\int (x + \sec x \,.\, \tan x)\, dx = \frac{x^{2}}{2} + \sec x + c$

3) $\int \sin(2x+4)\, dx = \frac{-1}{2}\cos(2x+4) + c$

4) $\int (\sin 2x + 4)\, dx = \frac{-1}{2}\cos(2x+4) + c$

5) $\int \sin(a+b)\, x\, dx = \frac{-1}{a+b}\cos(a+b)\,x + c$

6) $\int (\cos 3x + \cos 6x)\, dx = \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{6}\sin 6x + c$

7 $\int -\csc 2x \,.\, \cot 2x \, dx = -\left(-\frac{1}{2}\csc 2x\right) + c = \frac{1}{2}\csc 2x + c$

تكامل دالة الدالة

Exam

جد التكاملات الآتية

1 $\int \sin^4 x \cos x \, dx = \frac{\sin^5 x}{5} + c$

$m = \sin x$
$m' = \cos x \, (1)$
$m' = \cos x$

2 $\int \tan^6 x \sec^2 x \, dx = \frac{\tan^7 x}{7} + c$

$m = \tan x$
$m' = \sec^2 x$

3 $\int \sin 4x \cos 4x \, dx = \frac{1}{4}\int \sin 4x \cos 4x \,(4)\, dx$

$= \frac{1}{4} \frac{\sin^2 4x}{2} + c = \frac{1}{8}\sin^2 4x + c$

$m = \sin 4x$
$m' = \cos 4x \quad (4)$
$m' = 4\cos 4x$

4 $\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 2x} dx = \int \sin 2x \,.\cos^{-2} 2x \, dx$

$= \frac{-1}{2}\int -2 \sin 2x \,.\cos^{-2} 2x \, dx$

$= \frac{-1}{2} \frac{\cos^{-1} 2x}{-1} + c = \frac{1}{2} \frac{1}{\cos 2x} + c$

$= \frac{1}{2} \sec 2x + c$

$m = \cos 2x$
$m' = \sin 2x \quad (2)$
$m' = 2 \sin 2x$

5 $\int \csc^2 x \cos x \, dx = \int \csc x . \csc x . \cos x \, dx$

$= \int \csc x . \frac{1}{\sin x} . \cos x \, dx = \int \csc x . \frac{\cos x}{\sin x} \, dx$

$$= \int csc\, x . cot\, x \; dx \qquad = -\,csc\, x + c$$

6 $$\int \frac{\cos\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}\,dx = \int \cos\sqrt{1-x}\;\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$$

$$= -2\int \cos\sqrt{1-x}\;\frac{1}{\sqrt{1-x}}\;\frac{-1}{2}\,dx$$

$$= -2\sin\sqrt{1-x} + c$$

$$m = \sqrt{1-x}$$
$$m' = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}$$
$$m' = \frac{-1}{2}\;\frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

7 $$\int \sin 2x\,\cos^2 x\,dx = \int 2\sin x\,\cos x\,\cos^2 x\,dx$$

$$= \int 2\sin x\,\cos^3 x\,dx \qquad = -2\int -\sin x\,\cos^3 x\,dx$$

$$= -2\,\frac{\cos^4 x}{4} + c \quad = \frac{-1}{2}\cos^4 + c$$

$$m = \cos x$$
$$m' = -\sin x$$

8 $$\int (\cos 3x + 4\sin 5x)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\sin 3x + 4\left(\frac{-1}{5}\cos 5x\right) + c$$

$$= \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{4}{5}\cos 5x + c$$

تكامل الدوال المثلثية التربيعية

$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

أو $= 1 - 2\sin^2 x \Longrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

أو $= 2\cos^2 x - 1 \Longrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

2. $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x \Longrightarrow \tan^2 x = \sec^2 x + 1$

3. $1 + \cot^2 x = \csc^2 \Longrightarrow \cot^2 x = \csc^2 x - 1$

1. $\int \sec^2\theta \, d\theta = \tan\theta + c$

2. $\int \csc^2\theta \, d\theta = -\cot\theta + c$

3. $\int \tan^2\theta \, d\theta = \int (\sec^2\theta - 1)\, d\theta = \tan\theta - \theta + c$

4. $\int \cot^2\theta \, d\theta = \int (\csc^2\theta - 1)\, d\theta = -\cot\theta - \theta + c$

5. $\int \sin^2\theta \, d\theta = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\, d\theta$
$= \frac{1}{2}(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta) + c$

6. $\int \cos^2\theta \, d\theta = \int \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\, d\theta$
$= \frac{1}{2}(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta) + c$

Exam

جد التكاملات الآتية

1. $\int 9 \sin 3x \, dx = 9 \int \sin 3x \, dx$

$= 9 \left(\frac{-1}{3} \sin 3x \right) + c = -3 \sin 3x + c$

2. $\int x^2 \sin x^3 \, dx = \frac{1}{3} \int 3x^2 \sin x^3 \, dx$

$= \frac{1}{3} (-\cos x^3) + c = \frac{-1}{3} \cos x^3 + c$

3. $\int \sqrt{1 - 2\sin x} \, dx = \int \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x} \, dx$

$= \int \sqrt{\cos^2 x - 2\sin x \cos x + \sin^2 x} \, dx$

$= \int \sqrt{(\cos x - \sin x)^2} \, dx$

$= \pm \int (\cos x - \sin x) \, dx = \pm (\sin x + \cos x) + c$

4. $\int \sin^4 x \, dx = \int (\sin^2 x)^2 \, dx = \int \left[\frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\right]^2 dx$

$\int \frac{1}{4} (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) \, dx$

$= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{2} \int (\cos 2x) \, dx + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x \, dx$

$= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{2} \int (\cos 2x \, dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{2} (1 + \cos 4x) \, dx$

$= \frac{1}{4} x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{8} (x + \frac{1}{4} \sin 4x) + c$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

5) $\int \cos^3 x\,dx = \int \cos x . \cos^2 x\,dx$

$$= \int \cos x\,(1 - \sin^2 x)\,dx = \int \cos x\,dx - \int \cos x . \sin^2 x\,)dx$$

$$= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c$$

$m = \sin x$
$m' = \cos x$

6) $\int (\sin x - \cos x)^7 (\cos x \sin x)\,dx$

$$= \frac{(\sin x - \cos x)^8}{8} + c$$

$m = \sin x - \cos x$
$m' = \cos x + \sin x$

7) $\int \frac{1+\tan^2 x}{\tan^3 x}\,dx = \int \sec^2 x . \tan^{-3} x\,dx$

$$= \frac{\tan^{-2} x}{-2} + c = \frac{-1}{2\tan^2 x} + c$$

$m = \tan x$
$m' = \sec^2 x$

8) $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\,dx = \int \tan . \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int \tan . \sec^2 x\,dx$

$$= \frac{\tan^2 x}{2} + c = \frac{1}{2}\tan^2 x + c$$

9) $\int \sin 6x . \cos^2 3x\,dx = \int 2\sin 3x . \cos 3x . \cos^2 3x\,dx$

$$= \frac{-1}{3}\int 2\sin 3x . \cos^3 3x\,dx(-3)$$

$$= \frac{-2}{3} . \frac{\cos^4 3x}{4} + c$$

$$= \frac{-1}{6}\cos^4 3x + c$$

$m = \cos 3x$
$m' = -3\sin 3x$

10 $\int \frac{\cos 4x}{\cos 2x - \sin 2x}\,dx = \int \frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x}{\cos 2x - \sin 2x}\,dx$

$$= \int \frac{(\cos 2x - \sin 2x)\ (\cos 2x + \sin 2x)}{\cos 2x - \sin 2x}\,dx$$

$$= \int (\cos 2x + \sin 2x)\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x + c$$

Exam

جد التكاملات الآتية

1 $\int \sin^2 3x\,dx = \frac{1}{2}\int (1 - \cos 6x)\,dx$

$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}\sin 6x\right) + c = \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\sin 6x + c$$

2 $\int \cot^2 5x\,dx = \int (\csc^2 5x - 1)\,dx$

$$= \frac{-1}{5}\cot 5x - x + c$$

3 $\int \tan^2 7x\,dx = \int (\sec^2 7x - 1)\,dx$

$$= \frac{1}{7}\tan 7x - x + c$$

4 $\int \sec^2 4x\,dx = \frac{1}{4}\tan 4x + c$

5 $\int (\sin 2x - \cos 3x)(\sin 2x + \cos 3x)\,dx$

$$= \int (\sin^2 2x - \cos^2 3x)\,dx$$

$$= \int \sin^2 2x\,dx - \int \cos^2 3x\,dx$$

$$= \int \frac{1}{2}(1 - \cos 4x)\,dx - \int \frac{1}{3}(1 + \cos 6x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) - \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{6}\sin 6x\right) + c$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\sin 6x + c$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{8}\sin 4x - \cancel{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{12}\sin 6x + c$$

$$= \frac{-1}{8}\sin 4x - \frac{1}{12}\sin 6x$$

6 $\int (\sin 2x - 1)(\cos^2 2x + 2)\,dx$

$$= \int (\sin 2x \cdot \cos^2 2x + 2\sin 2x - \cos^2 2x - 2)\,dx$$

$$= \int (\sin 2x \cdot \cos^2 2x\,dx + \int 2\sin 2x\,dx - \int \cos^2 2x\,dx - \int 2\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int -2\sin 2x \cdot \cos^2 2x\,dx + \int 2\sin 2x\,dx - \int \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)\,dx - \int 2\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{\cos^3 x}{3} - \cos 2x - \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) - 2x + c$$

$$= -\frac{1}{6}\cos^3 2x - \cos 2x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x - 2x + c$$

$$= -\frac{1}{6}\cos^3 2x - \cos 2x - \frac{5}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + c$$

7 $\int \cos^5 x \, dx = \int \cos x \cos^4 x \, dx = \int \cos x [\cos^2 x]^2 \, dx$

$= \int \cos x [1 - \sin^2 x]^2 \, dx = \int \cos x [1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x] \, dx$

$= \int \cos x \, dx - \int 2 \sin^2 x \cos x \, dx + \int \sin^4 x \cos x \, dx$

$= \sin x - 2 \frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + c$

8 $\int \frac{\sin 2x}{\sin^3 x} dx = \int \sin 2x \cdot \sin^{-3} x \, dx$

$= \int 2 \sin x \cos x \cdot \sin^{-3} x \, dx = \int 2 \sin^{-2} x \cos x \, dx$

$= 2 \frac{\sin^{-1} x}{-1} + c = \frac{-2}{\sin x} + c = -2 \csc x + c$

9 $\int \cos 2x \cdot \sin x \, dx = \int (2\cos^2 x - 1) \sin x \, dx$

$= \int (2\cos^2 x \cdot \sin x \, dx - \int \sin x \, dx$

$= -2 \int \cos^2 x \cdot (-\sin x) \, dx - \int \sin x \, dx$

$= -2 \frac{\cos^3 x}{3} - (-\cos x) + c$

$= -\frac{2}{3} (\cos^3 x) + \cos x + c$

10 $\int \cos 2x \cdot \cos x \, dx = \int (1 - 2\sin^2 x) \cos x \, dx$

$= \int \cos x \, dx - \int 2\sin^2 x \cos x \, dx$

$= \sin x - 2 \frac{\sin^3 x}{3} + c = \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + c$

Exam

جد التكاملات الآتية

1. $$\int \frac{\sin 4x}{(3-\cos 4x)^2}\,dx = \int (3-\cos 4x)^{-2} \sin 4x \, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (3-\cos 4x)^{-2}(4)\sin 4x\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{(3-\cos 4x)^{-1}}{-1} + c$$

$$= \frac{-1}{4}\,\frac{1}{3-\cos 4x} + c$$

$m = 3 - \cos 4x$
$m' = 4\sin 4x$

2. $$\int \sin^2 x \cos 2x \, dx = \int \sin^2 x\,(2\cos^2 x - 1)\,dx$$

$$= \int 2\sin^2 x \cos^2 x \, dx - \int \sin^2 x \, dx$$

$$= \int 2(\sin x \cos x)^2 \, dx - \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\, dx$$

$$= \int 2\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 dx - \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\, dx$$

$$= \int 2\,\frac{1}{4}\sin^2 2x \, dx - \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}(1-\cos 4x)dx - \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + c$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{16}\sin 4x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

$$= \frac{-1}{4}x - \frac{1}{16}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

③ $\int \frac{\sqrt{\tan x+3}}{\cos^2 x}\,dx = \int (\tan x+3)^{\frac{1}{2}} \cdot \sec^2 x\,dx$

$= \frac{(\tan x+3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{(\tan x+3)^3} + c$

$m = \tan x + 3$
$m' = \sec^2 x$

④ $\int (2x + x\sin x^4)^3 \cos x^4\,dx$

$= \int [(x(2+\sin x^4)]^3 \cos x^4\,dx$

$= \frac{1}{4}\int [4x^3(2+\sin x^4)]^3 \cos x^4\,dx$

$= \frac{1}{4}\,\frac{(2+\sin x^4)^4}{4} + c = \frac{1}{16}(2+\sin x^4)^4 + c$

$m = 2 + \sin x^4$
$m' = \cos x^4 (4x)$

⑤ $\int \sin x\,(\cos^2 x - 2\cos x + 1)^{\frac{5}{2}}\,dx$

$= \int \sin x\,[(\cos x - 1)^2]^{\frac{5}{2}}\,dx = -\int -\sin x.(\cos x - 1)^5\,dx$

$= \frac{-(\cos x-1)^6}{6} + c = \frac{-1}{6}(\cos x - 1)^6 + c$

$m = \cos x - 1$
$m' = -\sin x$

⑥ $\int \frac{\cos^2 x - \cos x - 6}{\cos x + 2}\,dx$

$= \int \frac{\cos^2 x - \cos x - 6}{\cos x + 2}\,dx = \int \frac{(\cos x - 3)(\cos x + 2)}{\cos x + 2}\,dx$

$= \int (\cos x - 3)\,dx = \sin x - 3x + c$

⑦ $\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 2x - 2\cos 2x + 1}\,dx = \int \frac{\sin 2x}{(\cos 2x - 1)^2}\,dx$

$$= \frac{-1}{2}\int -2\sin 2x\,(\cos 2x - 1)^{-2}\,dx = \frac{-1}{2}\cdot\frac{(\cos 2x - 1)^{-1}}{-1} + c$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos 2x - 1} + c$$

8) $\int (\cos^4 x - \sin^4 x)\,dx$

$$= \int (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)\,dx$$

$$= \int \cos 2x\,(1)\,dx = \int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x + c$$

9) $\int \frac{2\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int \frac{2\sin x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\,dx = \int 2\sin x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{-2}{3}}\,dx$

$$= 2\,(3)\int \frac{1}{3}\sin x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{-2}{3}}\,dx = 6\left(-\cos x^{\frac{1}{3}}\right) + c$$

$$= -6\cos\sqrt[3]{x} + c$$

$m = x^{\frac{1}{3}}$

$m' = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}$

10) $\int 2\sec 4x \cdot \tan 4x\,dx = 2\left(\frac{1}{4}\right)\sec 4x + c$

$$= \frac{1}{2}\sec 4x + c$$

Exam

جد التكاملات الآتية

1) $\int \csc 3x \cdot \cot 3x\,dx = \frac{-1}{3}\csc 3x + c$

2) $\int \sec^2 4x\,dx = \frac{1}{4}\tan 4x + c$

③ $\int 3\,csc^2 4x\,dx = 3\left(\frac{-1}{4}\,cot\,4x\right) + c = -\frac{3}{4}\,cot\,4x + c$

④ $\frac{1}{2}\int 2\,tan^3 2x .\, sec^2 2x\,dx$

$= \frac{1}{2}\,\frac{\tan^4 2x}{4} + c = \frac{1}{8}\,tan^4 2x + c$

$m = tan\,2x$
$m' = 2\,sec^2 x$

⑤ $\int csc^2 2x .\; cot^{\frac{1}{2}} 2x\,dx = -\int - csc^2 2x .\; cot^{\frac{1}{2}} 2x\,dx$

$= -\frac{\cot^{\frac{3}{2}} x}{\frac{3}{2}} + c = \frac{-2}{3}\,cot^{\frac{3}{2}} x + c$

$m = cot\,2x$
$m' = -csc^2 x$

⑥ $\int tan\,2x .\; sec^5 2x\,dx$

$= \frac{1}{2}\int 2\,tan\,2x .\, sec\,2x\;\; sec^4 2x\,dx$

$= \frac{1}{2} . \frac{\sec^5 2x}{5} + c = \frac{1}{10}\,\sec^5 2x + c$

$m = sec\,2x$
$m' = 2\,sec\,2x . tan\,2x$

اللوغارتم الطبيعي

يعرف اللوغارتم الطبيعي x ويرمز له بـ (Ln x) بأنه

$$\text{Ln}\, x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt \qquad \forall\, x > 0$$

$$\frac{d}{dx}\,\text{Ln}\, u = \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx} \Rightarrow d(\ \text{Ln}\, u\,)\ du$$

Exam جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي

1. $y = \text{Ln}\,(3x^2 + 4) \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x^2+4}\cdot(6x) = \frac{6x}{3x^2+4}$

2. $y = \text{Ln}\,\frac{x}{2} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{x}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{x}$

3. $y = \text{Ln}\ 3x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x}(3) = \frac{1}{x}$

4. $y = \text{Ln}\ (x^2) \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2}(2x) = \frac{2}{x}$

07802543623

5 $y = (\text{Ln } x)^2 \rightarrow \frac{dy}{dx} = 2 \text{ Ln } x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x} \text{Ln } x$

6 $y = \sqrt{Ln\, x} \rightarrow y = (\text{Ln } x)^{\frac{1}{2}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} (\text{Ln } x)^{\frac{-1}{2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x(Lnx)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2x\sqrt{(Lnx)}}$

7 $y = \text{Ln}(\frac{1}{x})^3 = \text{Ln}(x^{-1})^3 = \text{Ln}(x)^{-3}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^{-3}} (-3x^{-4}) = x^3 \frac{-3}{x^4} = \frac{-3}{x}$

8 $y = x^2 \text{ Ln } x$

$\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot \frac{1}{x} + \text{Ln } x (2x) = x + 2x \text{ Ln } x$

$\frac{dy}{dx} = x(1 + 2 \text{ Ln } x)$

9 $y = \text{Ln}(\text{Ln } x) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{Lnx} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x\ Lnx}$

الواجب البيتي

جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي

1 $y = x^2 \text{ Ln}(x)$

2 $y = \text{Ln}(x^2 + x)$

3 $y = (\text{Ln } x)^3$

4 $y = \text{Ln}(x\sqrt{x^2+1})$

5 $y = x \text{ Ln } x - x$

6 $\text{Ln } \frac{x-1}{x+1}$

7 $y = x(\text{Ln } x)^3$

ملاحظة ان صيغة $d(\text{Ln}\, u) = \frac{1}{u}\, du$

تقودنا الى $\int \frac{du}{u} = \text{Ln}\, u + c$ بشرط ان تكون u موجبة .

Exam

جد التكاملات الآتية

1) $\int_0^4 \frac{2x}{x^2+9}\, dx = \left[\, \text{Ln}\,(x^2+9)\,\right]_0^4$

$= \text{Ln}\,(16+9) - \text{Ln}\,(0+9) = \text{Ln}\,25 - \text{Ln}\,9$

$= \text{Ln}\,\frac{25}{9} = \text{Ln}\,\frac{5^2}{3^2} = \text{Ln}\left(\frac{5}{3}\right)^2 = 2\text{Ln}\,\frac{5}{3}$

$u = x^2 + 9$
$du = 2x\, dx$

2) $\int \frac{1}{7x-2}\, dx = \frac{1}{7}\int \frac{7}{7x-2}\, dx = \frac{1}{7}\,\text{Ln}\,|7x-2| + c$

$u = 7x - 2$
$du = 7\, dx$

3) $\int \frac{x^3}{x^4-1}\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{x^4-1}\, dx = \frac{1}{4}\,\text{Ln}\,|x^4-1| + c$

$u = x^4 - 1$
$du = 4x^3\, dx$

4) $\int \frac{1}{x\,\text{Ln}\,x}\, dx = \int \frac{1}{x}\,\frac{1}{\text{Ln}x}\, dx = \text{Ln}\,|\text{Ln}\,x| + c$

$u = \text{Ln}\,x$
$du = \frac{1}{x}\, dx$

5) $\int \frac{Ln\,x}{x}\,dx = \int Ln\,x \cdot \frac{1}{x}\,dx$

$= \frac{(Lnx)^2}{2} + c = \frac{1}{2}(Ln\,x)^2 + c$

$u = Ln\,x$

$du = \frac{1}{x}\,dx$

6) $\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(1-\sqrt{x})}\,dx = -2\int \frac{1}{-2\sqrt{x}\,(1-\sqrt{x})}\,dx$

$= -2\,Ln\,|1-\sqrt{x}| + c$

$u = (1-\sqrt{x})$

$du = \frac{-1}{2\sqrt{x}}\,dx$

7) $\int_0^3 \frac{1}{x+1}\,dx = \Big[\,Ln(x+1)\,\Big]_0^3$

$u = x+1$

$du = dx$

$= Ln(3+1) - Ln(0+1) = Ln\,4 - Ln\,1 = Ln\,2^2 = 2Ln\,2$

8) $\int_0^1 \frac{3x^2+4}{x^3+4x+1}\,dx = \Big[Ln(x^3+4x+1)\Big]_0^1$

$= Ln\big[(1)^3+4(1)+1\big] - Ln\big[(0)^3+4(0)+1\big]$

$= Ln6 - Ln\,1 = Ln6 - 0 = Ln6 = Ln(3\times 2)$

$= Ln3 + Ln\,2$

على المتعلم أن يؤدب
نفسه في طلب العلم
ولايمل من تعلمه ولا
يستكثر ماعلم

قال سيد البلغاء
أمير المؤمنين
عليه السلام

07802543623

جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي

1 $y = \text{Ln}\,(2 - \cos x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2-\cos x}(+\sin x) = \frac{\sin x}{2-\cos x}$$

2 $y = \text{Ln}\,(\cos x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos x}(-\sin x) = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

3 $y = \text{Ln}\,(\tan x + \sec x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\tan x + \sec x} = \frac{\sec x\,(\sec x + \tan x)}{\tan x + \sec x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec x$$

4 $y = \text{Ln}\,(\sec x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec x \tan x}{\sec x} = \tan x$$

5 $y = \text{Ln}\,(\tan^2 x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\tan x\,.\sec^2 x}{\tan^2 x} = \frac{2\sec^2 x}{\tan x}$$

جد $\frac{dy}{dx} = x^2\,\text{Ln}\,|x|$

07802543623

جد التكاملات التالية

1) $\int \frac{\cos\theta \, d\theta}{1+\sin\theta} = \text{Ln}|\,1+\sin\theta\,| + c$

$u = 1+\sin\theta$
$du = \cos\theta \; d\theta$

2) $\int \frac{\cos x dx}{\sin x} = \text{Ln}\,|\,\sin x\,| + c$

$u = \sin x$
$du = \cos x \; dx$

3) $\int \frac{\sin x dx}{2-\cos x} = \text{Ln}\,|2 - \cos x\,| + c$

$u = 2- \cos x$
$du = + \sin x \; dx$

4) $\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{2+\tan x} dx = \text{Ln}\,[\,(\;2+\tan x\,)]_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$

$= \text{Ln}\,[\,(\;2+\tan\frac{\pi}{4}\,)] - \text{Ln}\,[\,(\;2+\tan\frac{-\pi}{4}\,)\,]$

$= \text{Ln}\,(\;2+1\,) - \text{Ln}\,(\;2-1\,) \quad = \quad \text{Ln}3 - \text{Ln}\,1$

$= \quad \text{Ln}3 - 0 \quad = \quad \text{Ln}3$

$u = 2- \tan x$
$du = \sec^2 x \; dx$

5) $\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

$= -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\text{Ln}\,|\,\cos x\,| + c$

جد

1) $\int \cot x \, dx$

2) $\int \frac{\text{Ln}\,x}{x} dx$

07802543623

دالة اللوغارتم الطبيعي

لتكن $y = \text{Ln } x$ وابدلنا y , x في مجموعة الازواج المرتبة

$$\{ (x , y) : y = \text{Ln } x \; ; \; x > 0 \}$$

لحصلنا على دالة نرمز لها

$$x = \text{Ln } y^{-1} \quad y > 0 \quad ; x \in R$$

$$x = e^{y}$$

ويكون مجال $\text{Ln}^{-1}(y)$ هو مدى $\text{Ln } x$

نتيجة

الدالة الأسية e^{x} (اساس e) هي عكس دالة اللوغاريتم الطبيعي

$$\boxed{\frac{d}{dx} e^{x} = e^{x}}$$

بصورة عامة

$$\boxed{\frac{d}{dx}(e^{u}) = e^{u} \frac{dy}{dx}}$$

Exam

جد $\dfrac{dy}{dx}$

1) $y = e^{\tan x}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{\tan x} \cdot Sec^{2} x$$

2) $y = e^{-5x^2+3x+5}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{-5x^2+3x+5} \cdot (-10x + 3)$$

3

$$y = x^2 e^x$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 e^x(1) + e^x(2x)$$

$$= x^2 e^x + 2x \cdot e^x \qquad = e^x(x^2 + 2x)$$

4

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^x - e^{-x})(e^x(1) + e^{-x}(-1)) - (e^x + e^{-x})(e^x(1) - e^{-x}(-1))}{(e^x - e^{-x})^2}$$

$$= \frac{(e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2}$$

$$= \frac{e^{2x} - e^{x-x} - e^{-x+x} + e^{-2x} - (e^{2x} + e^{x-x} + e^{-x+x} + e^{-2x})}{(e^x - e^{-x})^2}$$

$$= \frac{e^{2x} - 1 - 1 + e^{-2x} - e^{2x} - 1 - 1 - e^{-2x})}{(e^x - e^{-x})^2} \qquad = \frac{-4}{(e^x - e^{-x})^2}$$

5

$$y = e^{x^2} \cdot \text{Ln}\,|\,2x\,|$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2} \cdot \frac{2}{2x} + \text{Ln}\,|\,2x| \cdot e^{x^2}\, 2x$$

$$= \frac{1}{x}\, e^{x^2} + 2x\, e^{x^2} \cdot \text{Ln}\,|\,2x|$$

6

$$y = e^{\frac{1}{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{\frac{1}{x}} \frac{x(0) - 1\,(1)}{x^2} = e^{\frac{1}{x}} \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}}$$

7

$$y = \frac{1}{2}\,(e^x - e^{-x})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[e^x(1) - e^{-x}(-1)\right] \qquad = \frac{1}{2}\,(e^x + e^{-x})$$

07802543623

8

$$y = (1 + 2x)\, e^{-2x}$$

$$\frac{dy}{dx} = (1 + 2x)\, e^{-2x}\,(-2) + e^{-2x}\,(2)$$

$$= (-2 - 4x)\, e^{-2x} + 2\, e^{-2x}$$

$$= e^{-2x}\,(2 - 4x + 2) \quad = \quad -4x\, e^{-2x}$$

الواجب البيتي

جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يلي

1. $y = x^2\, e^{-x^2}$

   Answ: $2e^{-x^2}\,(x - x^3)$

2. $y = e^x\, Ln\, x$

   Answ: $e^x\,(Ln\, x + \frac{1}{x})$

3. $y = e^{-x^2}$

   Answ: $-2x\, e^{-x^2}$

4. $y = \frac{1}{2}\,(e^x + e^{-x})$

   Answ: $\frac{1}{2}\,(e^x - e^{-x})$

5. $y = \text{Ln}\, \frac{e^x}{1+e^x}$

   Answ: $\frac{e^x}{1+e^x}$

07802543623

Exam

جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي

1) $y = \cos(e^{\pi x})$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin(e^{\pi x}) \cdot (e^{\pi x})(\pi)$$

$$= -\pi e^{\pi x} \sin(e^{\pi x})$$

2) $y = e^{\cos x}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{\cos x} \cdot (-\sin x)(1) = -\sin x \; e^{\cos x}$$

ملاحظة

ان صيغة التفاضل

$$d(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$$

تقودنا الى صيغة التكامل

$$\int e^u \, du = e^u + c$$

Exam

جد التكاملات الآتية ؟

1) $\int x \, e^{x^2} dx$

$$= \frac{1}{2} \int 2x \, e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

$u = x^2$
$du = 2x \, dx$

2) $\int_{Ln3}^{Ln5} e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int_{Ln3}^{Ln5} 2 e^{2x} dx$

$$= \frac{1}{2} \left[e^{2x} \right]_{Ln3}^{Ln5} = \frac{1}{2} \left[e^{2Ln5} - e^{2Ln3} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[5^2 - 3^2 \right] = \frac{1}{2} \left[25 - 9 \right] = \frac{1}{2} \left[16 \right] = 8$$

$u = 2x$
$du = 2 \, dx$

3

$$\int_0^{Ln2} e^{-x}\,dx = -\int_0^{Ln2} -e^{-x}\,dx$$

$$= -\left[e^{-x} \right]_0^{Ln2} = -\left[e^{-Ln2} - e^{0} \right] = -\left[2^{-1} - 1 \right]$$

$$= -\left[\frac{1}{2} - 1 \right] = \frac{1}{2}$$

4

$$\int_0^{1} (1 - e^{x})^{2}\, e^{x}\,dx = \left[\frac{(1+e^{x})^{3}}{3} \right]_0^{1}$$

$$= \frac{1}{3}\left[(1+e^{1})^{3} - (1+e^{0})^{3} \right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[(1+e)^{3} - (1+1)^{3} \right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[(1+e)^{3} - 8 \right]$$

$u = 1 + e^{x}$
$du = e^{x}\,dx$

5

$$\int_1^{4} \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,dx = \int_1^{4} e^{\sqrt{x}}\,\frac{dx}{2\sqrt{x}} = \left[e^{\sqrt{x}} \right]_1^{4} = e^{\sqrt{4}} - e^{\sqrt{1}}$$

$u = \sqrt{x}$
$du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

$$= e^{2} - e$$

6

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x}\sin x\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x}(-\sin x)\,dx = -\left[e^{\cos x} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\left[e^{\cos\frac{\pi}{2}} - e^{\cos 0} \right] = -\left[e^{0} - e^{1} \right] = -\left[1 - e \right] = e - 1$$

$u = \cos x$
$du = -\sin x\,dx$

7

$$\int sec^{2}\,3x\; e^{\tan 3x}\,dx = \frac{1}{3}\int 3\,sec^{2}\,3x\; e^{\tan 3x}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\, e^{\tan 3x} + c$$

$u = \tan 3x$
$du = 3\sec^{2} 3x$

8. $$\int e^{\frac{x}{3}}\, dx = 3\int e^{\frac{x}{3}}\, \frac{1}{3}\, dx = 3\, e^{\frac{x}{3}} + c$$

$$u = \frac{x}{3}$$
$$du = \frac{1}{3}\, dx$$

9. $$\int \frac{4dx}{e^{3x}} = \int 4\, e^{-3x}\, dx = \frac{-4}{3}\int -3\, e^{-3x}\, dx$$
$$= \frac{-4}{3}\, e^{-3x} + c$$

$$u = 3x$$
$$du = -3\, dx$$

10. $$\int \frac{e^x dx}{1+2e^x}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2e^x dx}{1+2e^x}\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\, \text{Ln}\, |1+2\, e^x| + c$$

جد التكاملات الآتية ؟

1. $$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\, Ln\, x} = \left[\, \text{Ln}\, (\, \text{Ln} x\,)\right]_e^{e^x}$$
$$= \text{Ln}\, (\, \text{Ln}\, e^2\,) - \text{Ln}\, (\, \text{Ln}\, e\,) = \text{Ln}\, 2 - \text{Ln}\, 1$$
$$= \text{Ln}\, 2 - 0 = \text{Ln}\, 2$$

$$u = \text{Ln}\, x$$
$$du = \frac{1}{x}\, dx$$

2. $$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\, dx = \text{Ln}\, |\, e^x + e^{-x}\, | + c$$

$$u = e^x + e^{-x}$$
$$du = (e^x - e^{-x})\, dx$$

3. $$\int_1^2 x\, e^{-Ln\, x}\, dx = \int_1^2 x\, e^{Ln\, x^{-1}}\, dx = \int_1^2 x.\, x^{-1}\, dx$$

$$\int_{1}^{2} 1\, dx = [\ x\ ]_{1}^{2} = 2 - 1 = 1$$

4 $\int e^x \sqrt{e^x - 2}\, dx = \int e^x (\ e^x\ - 2\ )^{\frac{1}{2}}\, dx$

$u = e^x - 2$

$du = e^x\ dx$

$$= \frac{(e^x + 2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{(e^x - 2)^3} + c$$

جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يلي

1 $\int e^{2x}\, dx$

$= \frac{1}{2}\ e^{2x} + c$ Answ

2 $\int e^{\sin x} \cos\ dx$

$= e^{\sin x} + c$ Answ

3 $\int e^x \,.\, e^{2x}\ dx$

$= \frac{1}{3} e^{3x} + c$ Answ

4 $\int \sqrt{e^x}\ dx$

$= 2\ e^{\frac{1}{2}x} + c$ Answ

07802543623

ملاحظة

اذا كان a عدد ا موجبا فان $a^u = e^{u \ln a}$

مبرهنة

$$\frac{d}{dx} a^u = a^u \frac{du}{dx} \cdot \ln a$$

Exam

جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي ؟

1) $y = 3^{2x-5}$

$$\frac{dy}{dx} = 3^{2x-5} (2) . \ln 3 = 2 (\ln 3) \ 3^{2x-5}$$

2) $y = 2^{-x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = 2^{-x^2} (-2x) \ln(2) = (-2x \ \ln 2) \ . \ 2^{-x^2}$$

3) $y = 9^{\sqrt{x}}$

$$\frac{dy}{dx} = 9^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} \ \ln 9 = (\frac{1}{2\sqrt{x}} \ \ln 9) . 9^{\sqrt{x}}$$

4) $y = 7^{\frac{-x}{4}}$

$$\frac{dy}{dx} = 7^{\frac{-x}{4}} . \frac{-1}{4} \ \ln 7 = (\frac{-1}{4} \ \ln 7) \ 7^{\frac{-x}{4}}$$

5) $y = 5^{\sin x}$

$$\frac{dy}{dx} = 5^{\sin x} \cos x \ \ln 5 = (\cos x \ \ln 5) \ 5^{\sin x}$$

المتطابقات

1

أثبت ان $\int_0^{27} \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}+1}}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx = 14$

$m = x^{\frac{1}{3}} + 1$

$m' = \frac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}}$

$\mathcal{LHS} : \int_0^{27} \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}+1}}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx = \int \frac{(x^{\frac{1}{3}}+1)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}}\, dx$

$= \int_0^{27} x^{\frac{-2}{3}} (x^{\frac{1}{3}} + 1)^{\frac{1}{2}}\, dx = 3 \int_0^{27} \frac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}} (x^{\frac{1}{3}} + 1)^{\frac{1}{2}}\, dx$

$= 3 \left[\frac{(x^{\frac{1}{3}}+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^{27} = 3 \cdot \frac{2}{3} \left[(x^{\frac{1}{3}} + 1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{27}$

$= 2 \left[\{(27)^{\frac{1}{3}} +1 \}^{\frac{3}{2}} \right] - \left[\{ (0)^{\frac{1}{3}} +1 \}^{\frac{3}{2}} \right]$

$= 2 \left[(3 + 1)^{\frac{3}{2}} -(1)^{\frac{3}{2}} \right] = 2 \left[(4)^{\frac{3}{2}} -1 \right]$

$= 2 \left[(2^2)^{\frac{3}{2}} -1 \right] = 2 [8 -1] = 14\ \mathcal{RHS}$

$\mathcal{LHS} = \mathcal{RHS}$

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

2

أثبت ان $\int_{-2}^{4} | 3x - 6 |\, dx = 30$

$| 3x - 6 | = \begin{cases} 3x - 6 & \geq 2 \\ 6 - 3x & < 2 \end{cases}$

$\mathcal{LHS} : \int_{-2}^{4} | 3x - 6 |\, dx$

$\int_{-2}^{4} | 3x - 6 |\, dx = \int_{-2}^{2} (6 - 3x)\, dx + \int_{2}^{4} (3x - 6)\, dx$

07802543623

$$=\left[6x - \frac{3x^2}{2} \right]_{-2}^{2} + \left[\frac{3x^2}{2} - 6x \right]_{2}^{4}$$

$$=\left[\left(12 - \frac{3(2)^2}{2}\right) - \left(6(-2) - \frac{3(-2)^2}{2} \right) \right]$$

$$+\left[\left(\frac{3(4)^2}{2} - 6(4) \right) - \left(\frac{3(2)^2}{2} - 6(2) \right) \right]$$

$$=\left[(12-6) - (-12) - 6 \right] + \left[(24-24) - (6-12) \right]$$

$$= 6+18+(0+6) \qquad = 24+6 \qquad = 30 \quad RHS$$

$$LHS = RHS$$

######################################

أثبتّ ان

1. $$\int_0^3 \sqrt[3]{(3x-1)^2}\, dx = \frac{33}{5}$$

2. $$\int_1^4 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \frac{20}{3}$$

3. $$\int_0^x y^2\, dy = \frac{x^3}{3}$$

$f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[-2, 6]$ فاذا كان $\int_1^6 f(x)\,dx = 6$ وكان $\int_{-2}^{6} [f(x)+3]\,dx = 32$ فجد

$$\int_{-2}^{1} f(x)\,dx$$

Sol

$$\int_{-2}^{6} [f(x)+3]\,dx = 32$$

$$\int_{-2}^{6} f(x)\ dx + \int_{-2}^{6} 3\ dx = 32$$

$$\int_{-2}^{1} f(x)\ dx + \int_{1}^{6} f(x)\ dx + \Big[\,3x\,\Big]_{-2}^{6} = 32$$

$$\int_{-2}^{1} f(x)\ dx + 6 + \Big[\,3(6) - 3\,(-2)\Big] = 32$$

$$\int_{-2}^{1} f(x)\ dx + 6 + 18 + 6 = 32$$

$$\int_{-2}^{1} f(x)\ dx + 30 = 32$$

$$\int_{-2}^{1} f(x)\ dx = 32 - 30$$

$$\int_{-2}^{1} f(x)\ dx = 2$$

Exam

جد قيمة $a \in R$ اذا علمت ان

$$\int_{1}^{a} \left(x + \frac{1}{2} \right) dx = 2 \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\ dx$$

Sol

$$\left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x \right]_{1}^{a} = 2\Big[\tan x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\left[\frac{a^2}{2} + \frac{1}{2}a \right] - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1) \right] = 2\left[\tan\frac{\pi}{4} - \tan 0 \right]$$

$$\frac{a^2}{2} + \frac{a}{2} - 1 = 2(1-0) \Rightarrow \frac{a^2}{2} + \frac{a}{2} = 2+1$$

$$\left(\frac{a^2}{2} + \frac{a}{2} = 3 \right) \times (2)$$

07802543623

$$a^2 + a - 6 = 0$$

$$(a+3)(a-2) = 0$$

either $a+3 = 0 \Rightarrow a = -3$

or $a-2 = 0 \Rightarrow a = 2$

Exam

اذا كان للمنحني $f(x) = (x-3)^3 + 1$ نقطة انقلاب (a , b) جد القيمة العددية للمقدار

$$\int_0^b f'(x)\,dx - \int_0^a f''(x)\,dx$$

Sol

$$f(x) = (x-3)^3 + 1$$

$$f'(x) = 3(x-3)^2$$

$$f''(x) = 6(x-3)$$

نجعل $f''(x) = 0$

$$6(x-3) = 0$$

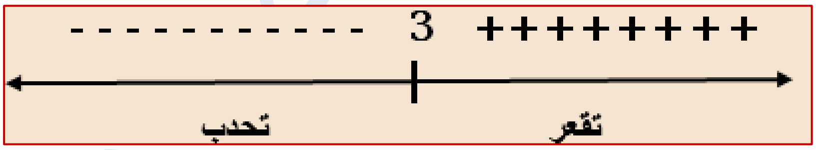
$$6x - 18 = 0 \qquad \div 6$$

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$f(x) = (x-3)^3 + 1 \Rightarrow f(3) = (3-3)^3 + 1$$

$$f(3) = 0 + 1 = 1$$

نقطة مرشحة $(3 , 1)$



نقطة انقلاب $(3 , 1)$

$$\int_0^b f'(x)\,dx - \int_0^a f''(x)\,dx$$

$$\int_0^1 3(x-3)^2\,dx - \int_0^3 6(x-3)\,dx$$

$$\left[3\frac{(x-3)^3}{3}\right]_0^1 - \left[6\frac{(x-3)^2}{2}\right]_0^3$$

$$= \Big[(x-3)^3 \Big]_0^1 - \Big[3\,(x-3)^2 \Big]_0^3$$

$$= \Big[(1-3)^3 - (0-3)^3 \Big] - \Big[3\,(3-3)^2 - 3\,(0-3)^2 \Big]$$

$$= \Big[(-2)^3 - (-3)^3 \Big] - \Big[3\,(0)^2 - 3\,(-3)^2 \Big]$$

$$= -8 + 27 + 27 \qquad = 46$$

ايجاد مساحة المنطقة المستوية

اولاً   مساحة المنطقة المحددة بمنحني ومحور السينات

لتكن $y = f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[a, b]$ ولتكن A مساحة المنطقة التي يحدها منحني الدالة ومحور السينات والمستقيمين $x = a \ , x = b$

اذا كانت $f(x) > 0$ فان المساحة A تساوي $A = \int_a^b f(x)\, dx$

اذا كانت $f(x) < 0$ فان المساحة A تساوي $A = -\int_a^b f(x)\, dx$

ملاحظة

عندما يقطع منحني الدالة $y = f(x)$ محور السينات في $x = a \ , x = b$ نتبع الخطوات الآتية

خطوات ايجاد المساحة عندما f تمتلك قيم موجبة قيم سالبة على $[a, b]$

1. نجد النقاط عندما $f(x) = 0$.
2. نستخدم قيم x التي تجعل $f(x) = 0$ كموقع على $[a, b]$ لنحصل على فترات جزئية من $[a, b]$
3. نجري عملية التكامل على كل فترة جزئية .
4. نجمع القيم المطلقة للتكاملات في الخطوة (3)

07802543623

Exam 1

جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 4x$

ومحور السينات وعلى الفترة $[-2, 2]$

SOL

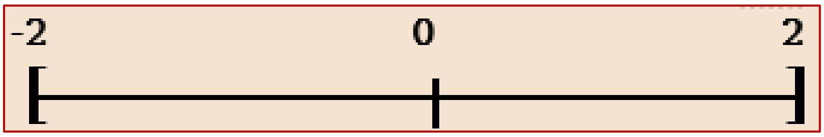
نجعل $f(x) = 0$

$x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0$

either $\quad x = 0 \quad \in [-2, 2]$

or $\quad x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 4 \Rightarrow x^2 = 4$

$x = \pm 2 \quad \in [-2, 2]$



$\Rightarrow [-2, 0] , [0,2]$

$$A_1 = \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2}\right]_{-2}^{0} = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^{0}$$

$$(0) - \left[\frac{(-2)^4}{4} - 2(-2)^2\right] = -\left[\frac{16}{4} - 2(4)\right] = -(4 - 8) = 4$$

$$A_2 = \int_{0}^{2} (x^3 - 4x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2}\right]_{0}^{2} = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{0}^{2}$$

$$\left[\frac{(2)^4}{4} - 2(2)^2\right] - (0) = -\left[\frac{16}{4} - 2(4)\right] = (4 - 8) = -4$$

$\therefore \; A = |A_1| + |A_2| = |4| + |-4| = 4 + 4 = 8$ وحدة مربعة

Exam 2

جد مساحة المنطقة التي يحدها منحني الدالة $y = x^2$

ومحور السينات والمستقيمان $x = 1 \; , x = 3$

SOL

نجعل $f(x) = 0$

$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \notin [1, 3]$

∴ لا تجزئة لفترة التكامل

$$A = \int_1^3 x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^3 = \frac{(3)^3}{3} - \frac{(1)^3}{3} = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}$$

Exam 3

جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ ومحور السينات .

SOL

نجعل $f(x) = 0$

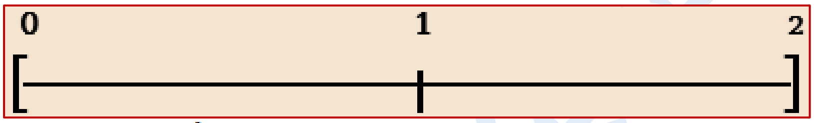
$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3x + 2) = 0$$

either $x = 0$

or $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-2)$

either $(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1$

or $(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2$



$\Rightarrow [0, 1] \; [1, 2]$

$$A_1 = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) \, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{\cancel{3}x^3}{\cancel{3}} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1$$

$$\left[\frac{1}{4} - 1 + 1 \right] - (0) = \frac{1}{4}$$

$$A_2 = \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x) \, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{\cancel{3}x^3}{\cancel{3}} + \frac{x^2}{2} \right]_1^2$$

$$\left[\frac{16}{4} - 8 + 4 \right] - \left[\frac{1}{4} - 1 + 1 \right] = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore A = |A_1| + |A_2| = \left| \frac{1}{4} \right| + \left| -\frac{1}{4} \right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$$

$$= \frac{1}{2}$$ وحدة مساحة

Exam 4

جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحني $f(x) = x^2 - 1$
ومحور السينات وعلى الفترة $[-2, 3]$

SOL

نجعل $f(x) = 0$

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \in [-2, 3]$$

$\therefore$ فترات التكامل هي $[1, 3]$, $[-1, 1]$, $[-2, -1]$

$$A_1 = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-2}^{-1}$$

$$\left[\frac{-1}{3} - (-1)\right] - \left[\frac{-8}{3} - (-2)\right] = \left[\frac{-1}{3} + 1\right] - \left[\frac{-8}{3} + 2\right]$$

$$= \frac{-1}{3} + 1 + \frac{8}{3} - 2 = \frac{7}{3} - 1 = \frac{4}{3}$$

$$A_2 = \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-1}^{1}$$

$$\left[\frac{1}{3} - 1\right] - \left[\frac{-1}{3} + 1\right] = \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3} - 1 = \frac{2}{3} - 2 = \frac{-4}{3}$$

$$A_3 = \int_{1}^{3} (x^2 - 1)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{1}^{3}$$

$$\left[\frac{27}{3} - 3\right] - \left[\frac{1}{3} - 1\right] = 9 - 3 - \frac{1}{3} + 1 = 7 - \frac{1}{3} = \frac{20}{3}$$

$$A = |A_1| + |A_2| + |A_3| = \left|\frac{4}{3}\right| + \left|-\frac{4}{3}\right| + \left|\frac{20}{3}\right|$$

$$\therefore A = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{20}{3} = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3}$$ وحدة مساحة

Exam 5

جد مساحة المحددة بالدالة $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-2, 3]$

SOL

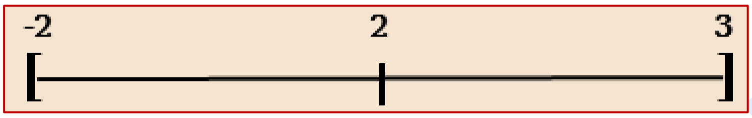
نجعل $f(x) = 0$

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

$$(x^2 - 4)(x^2 + 1) = 0$$

either $(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

or $(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \notin R$



$[-2, 2]$ $[2, 3]$

$$A_1 = \int_{-2}^{2} (x^4 - 3x^2 - 4)\,dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{\cancel{3}x^3}{\cancel{3}} - 4x\right]_{-2}^{2}$$

$$\left[\frac{32}{5} - 8 - 8\right] - \left[\frac{-32}{5} + 8 + 8\right] = \left[\frac{32}{5} - 16\right] - \left[\frac{-32}{5} + 16\right]$$

$$= \frac{32}{5} - 16 + \frac{32}{5} - 16 = \frac{64}{5} - 32 = \frac{64-160}{5} = \frac{-96}{5}$$

$$A_2 = \int_{2}^{3} (x^4 - 3x^2 - 4)\,dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{\cancel{3}x^3}{\cancel{3}} - 4x\right]_{2}^{3}$$

$$\left[\frac{243}{5} - 27 - 12\right] - \left[\frac{32}{5} - 8 - 8\right] = \left(\frac{243}{5} - 39\right) - \left(\frac{32}{5} - 16\right)$$

$$= \frac{243}{5} - 39 - \frac{32}{5} + 16 = \frac{211}{5} - 23 \quad \frac{211-115}{5} = \frac{96}{5}$$

$$\therefore A = |A_1| + |A_2| = \left|\frac{-96}{5}\right| + \left|\frac{96}{5}\right| = \frac{96}{5} + \frac{96}{5} = \frac{192}{5}$$

Exam 6

جد مساحة المحددة بالدالة $y = \sin x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[\frac{-\pi}{2}, \pi]$

SOL

نجعل $f(x) = 0$

$$\sin x = 0$$

$$x = \underset{\in}{0}\ ،\ \underset{\in}{\pi}\ ،\ \underset{\notin}{2\pi}\ ،\ \underset{\notin}{-\pi}\ ،\ \underset{\notin}{-2\pi}$$

$\frac{-\pi}{2}$ ——— 0 ——— π

$\therefore$ الفترات $[\frac{-\pi}{2}, 0], [0, \pi]$

$$A_1 = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{0} \sin x\, dx = [-\cos x]_{\frac{-\pi}{2}}^{0} = -(\cos 0 - \cos \frac{-\pi}{2})$$

$$= -(1 - 0) = -1$$

$$A_2 = \int_{0}^{\pi} \sin x\, dx = [-\cos x]_{0}^{\pi} = -(\cos \pi - \cos 0)$$

$$= -(-1 - 1) = 2$$

$\therefore A = |A_1| + |A_2| = |-1| + |2| = 1 + 2 = 3$ وحدة مساحة

Exam 7

جد مساحة المحددة بمنحني الدالة $y = \cos x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-\pi, \pi]$

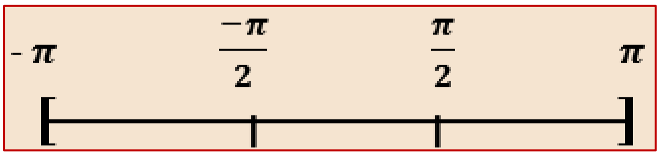
SOL

نجعل $f(x) = 0$

$$\cos x = 0$$

$$x = \underset{\in}{\frac{\pi}{2}}\ ،\ \underset{\notin}{\frac{3\pi}{2}}\ ،\ \underset{\in}{\frac{-\pi}{2}}\ ،\ \underset{\notin}{\frac{-3\pi}{2}}$$

07802543623



∴ الفترات $[-\pi, \frac{-\pi}{2}]$, $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $[\frac{\pi}{2}, \pi]$

$$A_1 = \int_{-\pi}^{\frac{-\pi}{2}} \cos x \, dx = [\sin x]_{-\pi}^{\frac{-\pi}{2}} = (\sin \frac{-\pi}{2}) - (\sin -\pi)$$

$$= -1 + 0 = -1$$

$$A_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = [\sin x]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = (\sin \frac{\pi}{2}) - (\sin \frac{-\pi}{2})$$

$$= (1 + 1) = 2$$

$$A_3 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, dx = [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \sin \pi - \sin \frac{\pi}{2}$$

$$= 0 - 1 = -1$$

$$\therefore A = |A_1| + |A_2| |A_3| = |-1| + |2| + |-1| = 1 + 2 + 1 = 4$$

وحدة مساحة

Exam 7 جد مساحة المحددة بالمنحني $y = \sin 3x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$

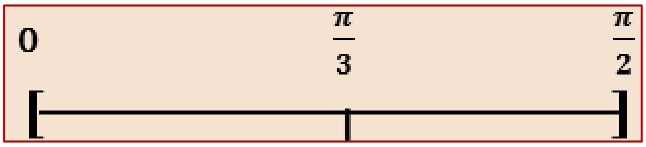
SOL

نجعل $f(x) = 0$

$$\sin 3x = 0$$

$$[3x = 0 \text{ ، } \pi \text{ ، } 2\pi] \div 3 \Rightarrow x = 0 \text{ ، } \frac{\pi}{3} \text{ ، } \frac{2\pi}{3}$$

$\in$ $\in$ $\notin$



∴ الفترات $[0, \frac{\pi}{3}]$, $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$

$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x \, dx = \left[\frac{-1}{3} \cos 3x \right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{-1}{3} \left[\left(\cos 3\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos 3(0) \right] = \frac{-1}{3} [-1 - 1] = \frac{2}{3}$$

$$A_2 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x \, dx = \left[\frac{-1}{3} \cos 3x \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{-1}{3} \left[\left(\cos 3\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos 3\left(\frac{\pi}{3}\right) \right] = \frac{-1}{3} [0 + 1] = \frac{-1}{3}$$

$$\therefore A = |A_1| + |A_2| = \left|\frac{2}{3}\right| + \left|\frac{-1}{3}\right| = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

وحدة مساحة

Exam 8

جد مساحة المحددة بالمنحني $y = 2\cos^2 x - 1$ ومحور السينات وعلى الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

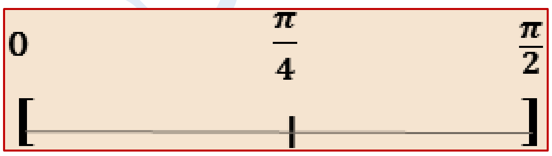
SOL

$$y = 2\cos^2 x - 1 = \cos 2x$$

نجعل $f(x) = 0$

$$\cos 2x = 0$$

$$\left[2x = \frac{\pi}{2} \ , \ \frac{3\pi}{2} \right] \times \frac{1}{2} \Rightarrow x = \underset{\in}{\frac{\pi}{4}} \ , \ \underset{\notin}{\frac{3\pi}{4}}$$



$\therefore$ الفترات $\left[0, \frac{\pi}{4}\right], \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\cos^2 x - 1)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \, dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left[\sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin 2(0)\right] = \frac{1}{2}\left[1 - 0\right] = \frac{1}{2}$$

$$A_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos^2 x - 1)\, dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \;\; dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left[\sin 2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[0\text{-}1\right] = \frac{-1}{2}$$

$$\therefore\; A = |A_1| + |A_2| = \left|\frac{1}{2}\right| + \left|\frac{-1}{2}\right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$ وحدة مساحة

جد المساحة المحددة بالمنحنيات ومحور السينات والفترات المحددة لكل مما يأتي

1. $f(x) = 1 - \sin x \quad dx$ ، $[0, 2\pi]$
2. $f(x) = 1 - 2\sin x \quad dx$ ، $[0, \frac{\pi}{2}]$
3. $f(x) = \sin x - \sin x \cos x \quad dx$ ، $[0, 2\pi]$
   $f(x) = \sin 2x - \sin x \quad dx$ $[0, \frac{\pi}{2}]$

مساحة منطقة المحددة بمنحنيين

اذا كان $f(x)$ ، $g(x)$ دالتين مستمرتين على الفترة $[a, b]$ فان المساحة A المحصورة بين المنحنين نجدها كما يلي

-1 اذا كان $g(x) > f(x)$ في الفترة $[a, b]$ فالمساحة A هي

$$A = \int_b^a [\, f(x) - g(x) \,]\, dx$$

-2 اذا كان $g(x) < f(x)$ في الفترة $[a, b]$ فالمساحة A هي

$$A = \int_b^a -[\, f(x) - g(x) \,]\, dx$$

-3 اذا تقاطع المنحنيان بين $[a, b]$ نجد نقاط التقاطع وذلك بجعل $f(x) = g(x)$ ثم نجد قيم (x) التي تنتمي الى (a, b) ونجزئه الى فتراة جزيئية . ثم نجد تكامل الفرق بين دالتين في كل فترة جزيئية ثم بعد ذلك نجد مجموع مطلق التكاملات والتي تمثل المساحة المطلوبة .

Exam

جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحني $y = \sqrt{x}$ والمستقيم $y = x$

Answ

نجد نقاط تقاطع المنحنيين

$$\sqrt{x} = x$$

بتربيع الطرفين

$$x = x^2 \Rightarrow x - x^2 = 0 \Rightarrow x(1 - x) = 0$$

either $x = 0$

or $x = 1$

$[0, 1]$

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x)\, dx = \int_0^1 (x^{\frac{1}{2}} - x)\, dx$$

$$\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \left[\frac{2}{3} \sqrt{x^3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1$$

$$\left[\frac{2}{3} \sqrt{(1)^3} - \frac{(1)^2}{2} \right] - 0 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4-3}{6} = \frac{1}{6}$$

$$A = \left| \frac{1}{6} \right| = \frac{1}{6}$$ وحدة مساحة

Exam

جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحني $y = x^3$ والمستقيم $y = x$

Answ

نجد نقاط تقاطع الدالتين

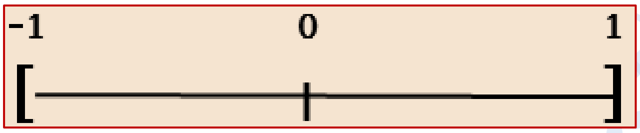
$$x^3 = x$$

$$x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x(x+1)(x-1) = 0$$

either $x = 0$

or $x + 1 = 0$ $\quad x = -1$

or $x - 1 = 0$ $\quad x = 1$



$\therefore$ فترات التكامل $[-1, 0]$ $[0, 1]$

$$A = |A_1| + |A_2| = \left| \int_{-1}^{0} (x^3 - x)dx \right| + \left| \int_0^1 (x^3 - x)dx \right|$$

$$\therefore A = \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{0} \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 \right|$$

$$= \left| (0) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) \right| + \left| \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) - (0) \right| \right.$$

$$= \left| -\left(\frac{1-2}{4} \right) \right| + \left| \left(\frac{1-2}{4} \right) \right| = \left| \frac{1}{4} \right| + \left| \frac{-1}{4} \right|$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$ وحدة مساحة

Exam

جد مساحة المنطقة المحددة بالدالتين $y = \sqrt{x-1}$ و $y = \frac{x}{2}$

وعلى الفترة $[\,2 , 5\,]$

Answ

نجد نقاط تقاطع الدالتين $\sqrt{x-1} = \frac{x}{2}$

بتربيع الطرفين $x - 1 = \frac{x^2}{4}$

$$\left[\, x - 1 = \frac{x^2}{4} \,\right] 4 \Rightarrow 4x - 4 = x^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \notin (2,5)$$

$$A = \int_2^5 \left(\sqrt{x-1} - \frac{x}{2} \right) dx = \int_2^5 \left[(x-1)^{\frac{1}{2}} - \frac{x}{2} \right] dx$$

$$A = \left[\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{2} \right]_2^5 = \left[\frac{2}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{4} \right]_2^5$$

$$= \left[\frac{2}{3} (5-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{(5)^2}{4} \right] - \left[\frac{2}{3} (2-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{(2)^2}{4} \right]$$

$$= \left[\frac{2}{3} (4)^{\frac{3}{2}} - \frac{25}{4} \right] - \left[\frac{2}{3} (1)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{4} \right]$$

$$= \left[\frac{2}{3} (2^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{25}{4} \right] - \left[\frac{2}{3} - 1 \right]$$

$$= \frac{16}{3} - \frac{25}{4} + \frac{1}{3} = \frac{64-75+4}{12} = \frac{-7}{12}$$

$$A = \left| \frac{-7}{12} \right| = \frac{7}{12}$$ وحدة مساحة

جد مساحة المنطقة المحددة بالدالتين $y = x^4 - 12$ و $y = x^2$

نجد نقاط تقاطع الدالتين

$$x^4 - 12 = x^2 \Rightarrow x^4 - x^2 - 12 = 0$$

$$(x^2 - 4)(x^2 + 3) = 0$$

either $(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

or $(x^2 + 3) \neq 0$ دائما

$$A = \int_{-2}^{2} (x^4 - 12 - x^2)\, dx = \left[\frac{x^5}{5} - 12x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{2}$$

$$A = \left[\frac{(2)^5}{5} - 12(2) - \frac{(2)^3}{3} \right] - \left[\frac{(-2)^5}{5} - 12(-2) - \frac{(-2)^3}{3} \right]$$

$$= \left[\frac{32}{5} - 24 - \frac{8}{3} \right] - \left[\frac{-32}{5} + 24 + \frac{8}{3} \right]$$

$$= \frac{32}{5} - 24 - \frac{8}{3} + \frac{32}{5} - 24 - \frac{8}{3} = \frac{64}{5} - 48 - \frac{16}{3}$$

$$= \frac{192 - 720 - 80}{15} = \frac{-608}{15}$$

$$A = \left| \frac{-608}{15} \right| = \frac{608}{15}$$ وحدة مساحة

جد المساحة المحددة بين منحني الدالتين

1. $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$, $y = 0$ ، $x = 0$ ، $x = 3$
2. $y = x$ $[-1,1]$ ، $y = \sqrt[3]{x}$ $[-1,1]$
3. $y = x$ ، $y = 3$ ومحور الصادات
4. $y = \frac{2}{\sqrt{x+4}}$ ، $y = \sqrt{x+4}$ $[0,5]$

Exam

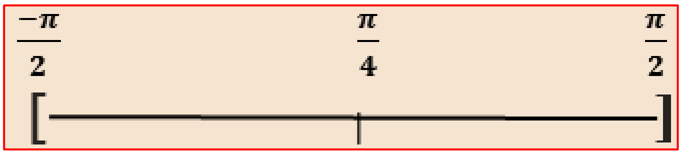
جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين $f(x) = \sin x$ ، $g(x) = \cos x$ وعلى الفترة $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Answ

نجد نقاط تقاطع الدالتين

$$\sin x = \cos x \qquad \div \qquad \cos x$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = 1 \Rightarrow \tan x = 1$$



$$x = \underset{\in}{\frac{\pi}{4}}, \quad \underset{\notin}{\frac{5\pi}{4}}$$

الفترات $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ ، $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{4}]$

$$A_1 = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\, dx = [\sin x + \cos x]_{\frac{\pi}{-2}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= (\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}) - (\sin(\frac{-\pi}{2}) + \cos(\frac{-\pi}{2}))$$

$$= (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}) - (-1 + 0) = \frac{2}{\sqrt{2}} + 1 = \sqrt{2} + 1$$

$$A_1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x)\, dx = [\sin x + \cos x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= (\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}) - (\sin(\frac{\pi}{4}) + \cos(\frac{\pi}{4}))$$

$$= (1 + 0) - (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}) = 1 - \frac{2}{\sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2}$$

$$\therefore A = |A_1| + |A_2| = |\sqrt{2} + 1| + |1 - \sqrt{2}| =$$

$\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} - 1 = 2\sqrt{2}$ وحدة مساحة

Exam

جد مساحة المنطقة المحددة بالدالتين $y = \cos x + 1$ ، $y = -\cos x$ وعلى الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$

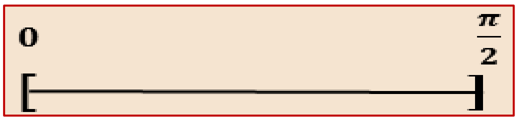
Answ

نجد نقاط تقاطع الدالتين

$$\cos x + 1 = -\cos x$$

$$\cos x + 1 + \cos x = 0$$

$$2\cos x = -1 \Rightarrow \cos x = \frac{-1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \notin , \frac{4\pi}{3} \notin$$



$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + 1 + \cos x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos x + 1)\, dx$$

$$= [2\sin x + x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[2\sin\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right] - [2\sin 0 + 0]$$

$$= \left(2(1) + \frac{\pi}{2}\right) - 0 = 2 + \frac{\pi}{2}$$

Exam

جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين $f(x) = \sin 2x$ ، $g(x) = \sin x$ وعلى الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$

Answ

نجد نقاط تقاطع الدالتين

$$\sin 2x = \sin x$$

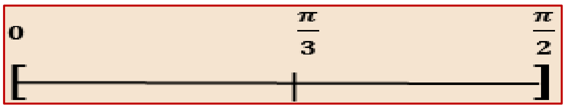
$$\sin 2x - \sin x = 0 \Rightarrow 2\sin x \cos x - \sin x = 0$$

$$\sin x\,(2\cos x - 1) = 0$$

either $\sin x = 0 \Rightarrow x = 0 \notin, \pi \notin, 2\pi \notin$

or $2\cos x - 1 = 0$

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \in , \frac{5\pi}{3} \notin$$



$[0, \frac{\pi}{3}]$ $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \sin x)\, dx = \left[\frac{-1}{2} \cos 2x + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \left[\frac{-1}{2} \cos 2(\frac{\pi}{3}) + \cos(\frac{\pi}{3}) \right] - \left[\frac{-1}{2} \cos 2(0) + \cos(0) \right]$$

$$= \left[\frac{-1}{2} (\frac{-1}{2}) + (\frac{1}{2}) \right] - \left[\frac{-1}{2} (1) + 1 \right] = \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right] - \left[\frac{1}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$A = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x - \sin x)\, dx = \left[\frac{-1}{2} \cos 2x + \cos x \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[\frac{-1}{2} \cos 2(\frac{\pi}{2}) + \cos(\frac{\pi}{2}) \right] - \left[\frac{-1}{2} \cos 2(\frac{\pi}{3}) + \cos(\frac{\pi}{3}) \right]$$

$$= \left[\frac{-1}{2} (-1) + (0) \right] - \left[\frac{-1}{2} (\frac{-1}{2}) + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$A = |A_1| + |A_2| = \left|\frac{1}{4}\right| + \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$ وحدة مساحة

المسافة

لتكن (t) سرعة جسم يتحرك على خط مستقيم وفي مستو فان المسافة المقطوعة في الفترة الزمنية $[t_1 , t_2]$ هي

$$d = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)\, dt|$$

حيث d تمثل المسافة ، المسافة كمية غير متجهة اما الازاحة كمية متجهة S والسرعة v و التعجيل a فان كلا منهما كمية متجهة لذا فان

السرعة

$$v = \int a(t) \quad dt$$

الازاحة

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) \quad dt$$

$S(t)$ الازاحة ← مشتقة ← $v(t)$ السرعة ← مشتقة ← $a(t)$ التعجيل

التعجيل $a(t)$ ← $\int$ ← السرعة $v(t)$ $\int_{t_1}^{t_2}$

الازاحة $S(t)$ $\int_{t_1}^{t_2}$

البعد $\int_{t_1}^{t_2}$

المسافة $d(t)$ $\left|\int_{t_1}^{t_2}\right|$

07802543623

Exam

جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t) = 2t - 4$ m/s
فجد

1. المسافة المقطوعة في الفترة [1,3] .
2. الازاحة المقطوعة في الفترة [1,3] .
3. المسافة المقطوعة في الثانية الخامسة .
4. بعده بعد مضي (4) ثواني من بدأ الحركة .

Answ

نجعل $v(t) = 0$

1

$2t - 4 = 0 \quad \div 2$

$t - 2 = 0 \Rightarrow t = 2 \in [1,3] \Rightarrow [1,2]\ [2,3]$

$$d = \int_1^3 |(2t-4)\,dt| = \int_1^2 |(2t-4)\,dt| + \int_2^3 |(2t-4)\,dt|$$

$$= \left| \left[\frac{\cancel{2}t^2}{\cancel{2}} - 4t \right]_1^2 \right| + \left| \left[\frac{\cancel{2}t^2}{\cancel{2}} - 4t \right]_2^3 \right|$$

$$= |[(4-8)-(1-4)]| + |[(9-12)-(4-8)]|$$

$$= |-4+3| + |-3+4| = |-1| + |1| = 1+1 = 2$$

2

$$S = \int_1^3 (2t-4)\,dt = \left[\frac{2t^2}{2} - 4t \right]_1^3$$

$$= [9-12] - [1-4] = -3+3 = 0$$

3

$$d = \int_4^5 (2t-4)\,dt = \left[\frac{2t^2}{2} - 4t \right]_4^5$$

$$= (25-20) - (16-16) = 5 - 0 = 5$$

07802543623

البعد 4 $d = \int_0^4 (2t - 4)\, dt = \left[\frac{\cancel{2}t^2}{\cancel{2}} - 4t \right]_0^4$

$= (16 - 16) - (0) = 0$

Exam

جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل $18\ m/s^2$ فاذا كانت سرعته قد اصبحت $(82\ m/s)$ بعد مرور $(4\ sec)$ من بدأ الحركة

جد

1 المسافة المقطوعة في الثانية الثالثة .

2 بعده بعد مضي (3) ثواني من بدا الحركة

Answ

$v(t) \int a(t)\ d(t) = \int 18\ d(t) = 18t + c$

وعند $t = 4\ sec$ ، $v(t) = 82$

$82 = 18(4) + c \Rightarrow 82 = 72 + c$

$c = 82 - 72 = 10$

$v(t) = 18t + 10$

1 $d = \int_2^3 (18t + 10) = \left[\frac{18t^2}{2} + 10t \right]_2^3$

$= [9(9) + 10(3)] - [9(4) + 10(2)]$

$= (81 + 30) - (36 + 20) = 111 - 56 = 55\ m$

البعد 2 $d = \int_0^3 (18t + 10)\, dt = \left[\frac{18t^2}{2} + 10t \right]_0^3$

$= [9(9) + 10(3)] - (0) = 81 + 30 = 111\ m$

07802543623

Exam

تتحرك نقطة من السكون وبعد t ثانية من بدأ الحركة اصبحت سرعتها $(100\,t - t^2)\,m/s$ اوجد الزمن اللازم لعودة النقطة الى موضعها الأول الذي بدأت منه ، ثم احسب التعجيل عندها .

Answ

$$v(t) = 100\,t - t^2$$

$$S(t) = \int (100\,t - t^2)\,dt = \frac{100\,t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + c$$

$$= 50\,t^2 - \frac{t^3}{3} + c$$

$S(t) = 0 \Rightarrow t = 0$ بدأ الجسم بالحركة من السكون

$$0 = 50(0)^2 - \frac{(0)^3}{3} + c \Rightarrow c = 0$$

$$S(t) = 50\,t^2 - \frac{t^3}{3}$$

عندما يعود الجسم الى موضعه الأول الذي تحرك منه (الموضع الأول تكون الازاحة $= 0$

$$S(t) = 0$$

$$\left[\, 0 = 50\,t^2 - \frac{t^3}{3} \,\right] \times (3)$$

$$0 = 150\,t^2 - t^3 \Rightarrow 0 = t^2\,(150 - t)$$

either $t^2 = 0 \Rightarrow t = 0$ يهمل

or $150 - t = 0 \Rightarrow t = 150$ sec

$$a(t) = \frac{d}{dt}\,v(t) = 100 - 2\,t$$

$$a(150) = 100 - 2\,(150) = 100 - 300 = -200 \quad m/s^2$$

1 جسم يتحرك من السكون بخط مستقيم بتعجيل قدره $3t + 2\ m/s^2$ جد الازاحة في الفترة [2 ,6]

ج // 136 m

2 جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $18\ m/s^2$ فاذا كانت سرعته قد اصبحت $32\ m/s$ بعد $4\ t$ على بدأ الحركة .

احسب بعده عن نقطة بدأ الحركة بعد مرور 10 sec

ج // 1000 m

3 اذا كانت سرعة جسم يتحرك على خط مستقيم هي $v(t)= 3t^2 + 6t + 3$

احسب

1. المسافة في الفترة [2 ,4]   ج // 98 m
2. الزمن عندما يصبح التعجيل $18\ m/s^2$

07802543623

الحجوم الدورانية

1 لحساب حجم الشكل المتولد من دوران المنطقة المحددة بين منحني الدالة

$$y = f(x)$$

المستمرة من $x = a$ ، $x = b$ حول محور السينات

$$\boxed{V = \pi \int_a^b y^2 \, dx}$$

2 لحسساب حجم الشكل المتولد من دوران المنطقة المحددة بين منحني الدالة

$$x = f(y)$$

المستمرة من $y = a$ ، $y = b$ حول محور الصادات

$$\boxed{V = \pi \int_a^b x^2 \, dy}$$

Exam

المنطقة المحددة بين المنحني $0 \le x \le 4$ ، $y = \sqrt{x}$ ومحور السينات دارت حول محور السينات جد حجمها

Answ

$$V = \pi \int_a^b y^2 \, dx = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 \, dx = \pi \int_0^4 x \, dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \pi \left[\frac{16}{2} - \frac{0}{2} \right] = 8\pi$$ وحدة مكعبة

07802543623

Exam

المنطقة المحددة بين المنحني $x = \frac{1}{\sqrt{y}}$, $1 \le y \le 4$

دارت حول محور الصادات جد حجمها

Answ

$$V = \pi \int_a^b x^2\, dy = \pi \int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2 dy = \pi \int_1^4 \frac{1}{y}\, dy$$

$$= \pi \Big[\operatorname{Ln} y \Big]_1^4 = \pi \Big[\operatorname{Ln} 4 - \operatorname{Ln} 1 \Big] = \pi \Big[\operatorname{Ln} 2^2 - 0 \Big]$$

$$= 2\pi \operatorname{Ln} 2$$ وحدة مكعبة

Exam

اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 8x$ والمستقيمين $x = 0$ ، $x = 2$ حول المحور السيني

Answ

$$V = \pi \int_a^b y^2\, dx = \pi \int_0^2 8x\, dy$$

$$= \pi \left[\frac{8x^2}{2} \right]_0^2 = \pi \left[4x^2 \right]_0^2 = \pi \left[4(2)^2 - 4(0)^2 \right] = 16\pi$$ وحدة مكعبة

Exam

اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ الذي معادلته $y = 2x^2$ والمستقيمين $x = 5$ ، $x = 0$ حول المحور السيني

Answ

$$V = \pi \int_a^b y^2\, dx = \pi \int_0^5 [2x^2]^2\, dy = \pi \int_0^5 4x^4\, dy$$

$$= \pi \left[\frac{4x^5}{5} \right]_0^5 = \pi \left[\frac{4(5)^5}{5} - \frac{4(0)^5}{5} \right] = \pi\,(2500 - 0) = 2500\,\pi$$

وحدة مكعبة

Exam

اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ الذي معادلته $y = 4x^2$ والمستقيمين $y = 16$ ، $y = 0$ حول المحور الصادي

Answ

$$y = 4x^2 \rightarrow x^2 = \frac{y}{4}$$

$$V = \pi \int_a^b x^2\, dy = \pi \int_0^{16} \frac{y}{4}\, dy = \pi \int_0^{16} \frac{1}{4}\, y\, dy$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{16} = \frac{\pi}{4}\left[\frac{(16)^2}{2} - 0\right] = \frac{\pi}{8}\left[(16)\,.\,16\right] = 32\pi$$

وحدة مكعبة

Exam

اوجد الحجم الناشئ من دوران المنطقة المحصورة بين محور الصادات ومنحني الدالة $y = \frac{1}{x}$ والمستقيمين $x = \frac{1}{2}$ ، $x = 1$ دورة كاملة حول المحور الصادي

Answ

$$x = 1 \rightarrow y = \frac{1}{1} \rightarrow y = 1$$

$$x = \frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{1}{\frac{1}{2}} \rightarrow y = 2$$

$$y = \frac{1}{x} \rightarrow x = \frac{1}{y}$$

$$V = \pi \int_a^b x^2\, dy = \pi \int_1^2 \left(\frac{1}{y}\right)^2 dy = \pi \int_1^2 \frac{1}{y^2}\, dy = \pi \int_1^2 y^{-2}\, dy$$

وحدة مكعبة

$$= \pi\left[\frac{y^{-1}}{-1}\right]_1^2 = \pi\left[\frac{-1}{y}\right]_1^2 = \pi\left[\frac{-1}{2} - \left(\frac{-1}{1}\right)\right] = \frac{1}{2}\pi$$

Exam

اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين منحني الدالة $y = x^2 + 1$ والمستقيم $y = 4$ حول المحور الصادي

Answ

مع محور الصادي يكون $x = 0$

$$y = x^2 + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$y = x^2 + 1 \qquad x^2 = y - 1$$

$$V = \pi \int_a^b x^2 \, dy = \pi \int_1^4 (y - 1) dy$$

$$= \pi \left[\frac{y^2}{2} - y \right]_1^4 = \pi \left[\left(\frac{16}{2} - 4 \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \right]$$

$$= \pi \left[(8 - 4) - \left(\frac{-1}{2} \right) \right] = \pi \left(4 + \frac{1}{2} \right) = \frac{9}{2} \pi$$

السلام عليكم ورحمة الله وبركاته

الاستاذ

حسين عبد زيد خلف

07802543623

الرياضيات

2017

للصف السادس العلمي

الاستاذ

حسين عبد زيد

07802543623

الفصل الخامس & الفصل السادس

الفصل الخامس

المعادلات التفاضلية الاعتيادية

المعادلة التفاضلية

هي المعادلة التي تحتوي على مشتقة واحدة او اكثر للدالة المجهولة في المعادلة (اي للمتغير التابع في المعادلة).

المعادلة التفاضلية الاعتيادية

هي علاقة بين متغير مستقل وليكن (x) ودالته غير المعروفة (y) وبعض مشتقات (y) بالنسبة الى (x) .

المرتبة او (الرتبة): - بانها رتبة اعلى مشتقة .

SOL

الدرجة :- اكبر قوة (أس) مرفوعة له اعلى مشتقة في المعادلة التفاضلية

Exam

بين رتبة ودرجة كل من المعادلات التفاضلية الأتية ؟

1. $\frac{dy}{dx} + x - 7y = 0$ من الرتبة الاولى والدرجة الاولى

2. $\frac{d^2y}{dx^2} = 5x - xy + 7$ من الرتبة الثانية والدرجة الاولى

3. $(y''')^3 + y' - y = 0$ من الرتبة الثالثة والدرجة الثالثة

4. $y'' + 2y(y')^3 = 0$ من الرتبة الثانية والدرجة الاولى

5. من الرتبة الثالثة والدرجة الثانية
$$x^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^4 + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + 2\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

من الرتبة الرابعة والدرجة الاولى

6. $y^{(4)} + \cos y - x^2 y y' = 0$

7. $(y'')^2 = \sqrt{1 + (y')^2}$

من الرتبة الثانية والدرجة الرابعة $(y'')^4 = 1 + (y')^2$

حل المعادلة التفاضلية الاعتيادية

يتم ذلك بإيجاد علاقة بين المتغير التابع (غير المستقل) (y) والمتغير المستقل (x) بحيث تكون العلاقة خالية من الاشتقاقات وان تحقق المعادلة التفاضلية بعد التعويض .

حل المعادلة التفاضلية هو اي علاقة بين متغيرات المعادلة التفاضلية بحيث ان هذه العلاقة :-

1. خالية من المشتقة .
2. معرفة على فترة معينة .
3. تحقق المعادلة التفاضلية .

Exam

بين ان العلاقة $y = x^2 + 3x$

حلا للمعادلة التفاضلية $x y' = x^2 + y$

SOL

الحل : -

$$y = x^2 + 3x$$

$$y' = 2x + 3$$

$$L.H.S = x y' = x(2x + 3) = 2x^2 + 3x$$

$$R.H.S = x^2 + y = x^2 + x^2 + 3x = 2x^2 + 3x = L.H.S$$

$\therefore$ $y = x^2 + 3x$ هي حلا للمعادلة اعلاه .

07802543623

Exam

اثبت ان $y = x \text{ Ln } |x| - x$

احد حلول المعادلة $x\frac{dy}{dx} = x + y \ ; x > 0$.

SOL

$$y = x \text{ Ln } |x| - x$$

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{1}{x} + \text{Ln } |x| (1) - 1 = 1 + \text{Ln} |x| - 1 = \text{Ln } |x|$$

$$\text{L.H.S} = x\frac{dy}{dx} = x \text{ Ln } |x|$$

$$\text{R.H.S} = x + y = x + x \text{ Ln } |x| - x = x \text{ Ln } |x| = \text{L.H.S}$$

∴ احد حلول المعادلة اعلاه .

Exam

اثبت ان $\text{Ln } y^2 = x + a$

حل للمعادلة $2y' - y = 0 \quad ; a > R$.

SOL

$$\text{Ln } y^2 = x + a \Rightarrow 2 \text{ Ln } y = x + a$$

$$\left[2\left(\frac{1}{y}\right) y' = 1 \right] (y) \Rightarrow 2y' = y$$

$$2y' - y = 0$$

∴ $\text{Ln } y^2 = x + a$ هو حلا للمعادلة اعلاه .

Exam

العلاقة $y = x^3 + x - 2$ حل

حل للمعادلة التفاضلية $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$.

SOL

$$y = x^3 + x - 2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3x^2 + 1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$$

∴ العلاقة $y = x^3 + x - 2$ هو حلا للمعادلة اعلاه

Exam

هل العلاقة $2x^2 + y^2 = 1$

حل للمعادلة التفاضلية $y^3 y'' = 1$.

SOL

$$2x^2 + y^2 = 1$$

$$4x + 2yy' = 0 \qquad \div 2$$

$$2x + yy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{-2x}{y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$2 + yy'' + y'(y') = 0$$

$$2 + yy'' + (y')^2 = 0$$

$$yy'' + (y')^2 = -2$$

$$yy'' + \left(\frac{-2x}{y}\right)^2 = -2$$

$$\left[yy'' + \left(\frac{4x^2}{y^2}\right) = -2\right] y^2$$

$$y^3 y'' + 4x^2 = -2y^2$$

$$y^3 y'' = -4x^2 - 2y^2$$

$$y^3 y'' = -2(2x^2 + y^2)$$

$$y^3 y'' = -2(1) = -2 \qquad R.H.S$$

$\therefore$ العلاقة $2x^2 + y^2 = 1$ هو حلا للمعادلة اعلاه

Exam

هل العلاقة $y^2 = 3x^2 + x^3$

حل للمعادلة التفاضلية $yy'' + (y')^3 - 3x = 5$

SOL

$$y^2 = 3x^2 + x^3$$

$$2yy' = 6x + 3x^2$$

$$2yy'' + y'(2y') = 6 + 6x \qquad \div 2$$

$$yy'' + (y')^2 = 3 + 3x$$

$$yy'' + (y')^2 - 3x = 3 \neq 5 \neq \qquad R.H.S$$

$\therefore$ العلاقة $y^2 = 3x^2 + x^3$ ليس حلا للمعادلة اعلاه

07802543623

Exam

هل العلاقة $y = x + 2$

حل للمعادلة التفاضلية $y'' + 3y' + y = x$.

SOL

$$y = x + 2$$
$$y' = 1 \quad \Rightarrow \quad y'' = 0$$
$$L.H.S = y'' + 3y' + y = 0 + 3(1) + x + 2 = 3 + x + 2$$
$$= x + 5 \neq R.H.S$$

$\therefore$ $y = x + 2$ ليس حلا للمعادلة اعلاه

Exam

برهن ان $y = 3\cos 2x + 2\sin 2x$

هو حلا للمعادلة التفاضلية $y'' + 4y = 0$

SOL

$$y = 3\cos 2x + 2\sin 2x$$
$$y' = 3(-\sin 2x)(2) + 2\cos 2x\,(2)$$
$$= -6\sin 2x + 4\cos 2x$$
$$y'' = -6\cos 2x\,(2) + 4(-\sin 2x)(2)$$
$$= -12\cos 2x - 8\sin 2x$$
$$= -4(3\cos 2x + 2\sin 2x) = -4y$$
$$y'' + 4y = 0 \quad = R.H.S$$

$\therefore$ العلاقة $y = 3\cos 2x + 2\sin 2x$ هو حلا للمعادلة اعلاه .

قال سيد البلغاء (علي بن ابي طالب) عليه السلام

لا خير في قراءة لا تدبر فيها . ولا خير في علم لا ورع فيه

Exam

هل العلاقة $y = \tan x$

حل للمعادلة التفاضلية $y'' = 2y(1+y^2)$

SOL

$$y = \tan x$$
$$y' = \sec^2 x \ (1) = [\sec x]^2$$
$$y'' = 2\sec x \cdot \sec x \cdot \tan x \ (1)$$
$$= 2\tan x \cdot \sec^2 x \qquad [1 + \tan^2 x = \sec^2 x]$$
$$= 2\tan x\,(1 + \tan^2 x)$$
$$y'' = 2y\,(1 + y^2) \qquad = \text{R.H.S}$$

$\therefore$ $y = \tan x$ هو حلا للمعادلة اعلاه .

Exam

بين ان $y = e^{2x} + e^{-3x}$

حل للمعادلة التفاضلية $y'' + y' - 6y = 0$

SOL

الحل : -

$$y = e^{2x} + e^{-3x}$$
$$y' = e^{2x}(2) + e^{-3x}(-3) = 2e^{2x} - 3e^{-3x}$$
$$y'' = 2e^{2x}(2) - 3e^{-3x}(-3) = 4e^{2x} + 9e^{-3x}$$
$$\text{L.H.S} = y'' + y' - 6y$$
$$= 4e^{2x} + 9e^{-3x} + 2e^{2x} - 3e^{-3x} - 6(e^{2x} + e^{-3x})$$
$$= \cancel{6e^{2x}} + \cancel{6e^{-3x}} - \cancel{6e^{2x}} - \cancel{6e^{-3x}} = 0 \qquad = \text{R.H.S}$$

$\therefore$ $y = e^{2x} + e^{-3x}$ هو حلا للمعادلة اعلاه .

Exam

بين ان $y = a e^{-x}$

حل للمعادلة التفاضلية $y' + y = 0$ حيث $a \in R$

SOL

$$y = a e^{-x}$$

$$y' = a e^{-x}(-1) = -a e^{-x}$$

$$y' = -y \Rightarrow y' + y = 0 = R.H.S$$

∴ $y = a e^{-x}$ هو حلا للمعادلة اعلاه .

Exam

بين ان $\ln|y| = x^2 + c$

حل للمعادلة التفاضلية $y'' = 4x^2 y + 2y$

SOL

$$\ln|y| = x^2 + c$$

$$\left[\frac{1}{y} y' = 2x\right] y \Rightarrow y' = 2xy$$

$$y'' = 2xy' + y(2) = 2x(2xy) + 2y$$

$$y'' = 4x^2 y + 2y = R.H.S$$

∴ $\ln|y| = x^2 + c$ هو حلا للمعادلة اعلاه .

المعادلات التفاضلية الاعتيادية

من المرتبة الاولى والدرجة الاولى

طرق حل المعادلات التفاضلية

اولا المعادلات التي تنفصل متغيراتها

في هذا النوع من المعادلات وكما يظهر من اسمها نستطيع ان نعزل كل الحدود التي تحتوي على (x) فقط مع (dx) في جانب .

و الحدود التي تحتوي على (y) فقط مع (dy) في الجانب الاخر.

فنحصل على

$$f(x)\,dx = g(y)\,dy$$

ثم نكمل طرفي المعادلة فيكون

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx + c$$

حيث c ثابت اختياري . x

Exam حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = 2x + 5$

SOL

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 5$$

$$dy = (2x + 5)\,dx$$

$$\int dy = \int (2x + 5)\,dx$$

$$y = \frac{2x^2}{2} + 5x + c$$

$$y = x^2 + 5x + c$$

Exam

حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{y}$

SOL

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{y} \Rightarrow y\,dy = (x-1)\,dx$$

$$\int y\,dy = \int (x-1)\,dx$$

$$\left(\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} - x + c\right) \times 2$$

$$y^2 = x^2 - 2x + 2c$$

$$y = \pm\left(x^2 - 2x + 2c\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$y = \pm\left(x^2 - 2x + c_1\right)^{\frac{1}{2}}$$

حيث $2c = c_1$

Exam

حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = (x+1)(y-1)$

SOL

$$\frac{dy}{dx} = (x+1)(y-1) \Rightarrow \frac{dy}{y-1} = (x+1)\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y-1} = \int (x+1)\,dx$$

$$\ln|y-1| = \frac{(x+1)^2}{2} + c$$

$$y - 1 = e^{\frac{(x+1)^2}{2} + c}$$

$$y = e^{\frac{(x+1)^2}{2} + c} + 1$$

07802543623

Exam

اوجد حل المعادلة التفاضلية $y' - x\sqrt{y} = 0$

عندما $x = 2,\ y = 9$

SOL

$$y' - x\sqrt{y} = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = x\sqrt{y}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = x\,dx \Longrightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int x\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y^{\frac{1}{2}}} = \int x\,dx \Longrightarrow \int y^{-\frac{1}{2}}\,dy = \int x\,dx$$

$$\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{x^2}{2} + c \Longrightarrow 2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$2\sqrt{9} = \frac{1}{2}(2)^2 + c \Longrightarrow 2(3) = \frac{1}{2}(4) + c$$

$$6 = 2 + c \Longrightarrow c = 6 - 2 = 4$$

$$c = 4$$

$$\left[2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2 + 4\right] \qquad \div 2$$

$$\left[\sqrt{y} = \frac{1}{4}x^2 + 2\right]$$ بتربيع الطرفين

$$y = \left[\frac{1}{4}x^2 + 2\right]^2$$

Exam

اوجد حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} + x\,y = 3\,x$

عند $x = 1,\ y = 2$

SOL

$$\frac{dy}{dx} + x\,y = 3\,x$$

$$\frac{dy}{dx} = 3\,x - x\,y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\,(3 - y)$$

$$\frac{dy}{3-y} = x\,dx$$

$$-\int \frac{-dy}{3-y} = \int x\,dx$$

$$-\,\mathrm{Ln}\,|3 - y| = \frac{1}{2}x^2 + c \Rightarrow -\,\mathrm{Ln}\,|3 - 2| = \frac{1}{2}(1)^2 + c$$

$$-\,\mathrm{Ln}\,|1| = \frac{1}{2} + c \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} + c \Rightarrow c = -\frac{1}{2}$$

$$\left[-\,\mathrm{Ln}\,|3 - y| = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right] \qquad \times -1$$

$$\mathrm{Ln}\,|3 - y| = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}(1 - x^2)$$

بأخذ e للطرفين

$$3 - y = e^{\frac{1}{2}(1-x^2)}$$

$$y = 3 - e^{\frac{1}{2}(1-x^2)}$$

Exam

حل المعادلة التفاضلية $dy = \sin x \,.\, \cos^2 y\ \ dx$

حيث $y \neq 0$ $\quad y \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$

SOL

$$dy = \sin x \,.\, \cos^2 y\ \ dx$$

$$\frac{dy}{\cos^2 y} = \sin x\ dx$$

07802543623

$$\int \frac{dy}{\cos^2 y} = \int \sin x \, d\,x$$

$$\int \sec^2 y \, d\,y = \int \sin x \, d\,x$$

$$\tan y = -\cos x + c$$

حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = e^{(2x+y)}$
حيث $y = 0$ عندما $x = 0$

SOL

$$\frac{dy}{dx} = e^{(2x+y)} \qquad \frac{dy}{dx} = e^{2x} \cdot e^{y}$$

$$\frac{dy}{e^{y}} = e^{2x} \, d\,x$$

$$\int \frac{dy}{e^{y}} = \int e^{2x} \, d\,x$$

$$-\int -e^{-y} \, dy = \frac{1}{2} \int 2e^{2x} \, d\,x$$

$$-e^{-y} = \frac{1}{2} e^{2x} + c$$

وعند $x = 0 \, , \, y = 0$

$$-e^{0} = \frac{1}{2} e^{2(0)} + c$$

$$-1 = \frac{1}{2} + c \Longrightarrow c = -1 - \frac{1}{2} \Longrightarrow c = \frac{-3}{2}$$

$$\left[-e^{-y} = \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{3}{2} \right] \; (-1)$$

$$e^{-y} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} e^{2x} \Longrightarrow \frac{1}{e^{y}} = \frac{1}{2} (3 - e^{2x})$$

$$e^{y} = \frac{2}{3 - e^{2x}} \Longrightarrow y = \mathrm{Ln} \left| \frac{2}{3 - e^{2x}} \right|$$

جد الحل العام لكل من للمعادلات التفاضلية الآتية

❶ $(x+1)\dfrac{dy}{dx} = 2y$

SOL

$$(x+1)\frac{dy}{dx} = 2y \Rightarrow (x+1)\,dy = 2y\,dx$$

$$\frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x+1}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2\frac{dx}{x+1}$$

$$\text{Ln}|y| = 2\,\text{Ln}|x+1| + \text{Ln}|c|$$

$$\text{Ln}|y| = 2\,\text{Ln}(x+1)^2 + \text{Ln}|c|$$

$$\text{Ln}|y| = \text{Ln}|c(x+1)^2|$$

بأخذ e للطرفين

$$y = \pm c(x+1)^2$$

② $xy\dfrac{dy}{dx} + y^2 = 1 - y^2$

SOL

$$xy\frac{dy}{dx} + y^2 = 1 - y^2 - y^2 \Rightarrow xy\frac{dy}{dx} = 1 - 2y^2$$

$$xy\,dy = (1-2y^2)\,dx$$

$$\frac{y\,dy}{1-2y^2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{-4y\,dy}{1-2y^2} = -4\int \frac{dx}{x}$$

$$\text{Ln}|1-2y^2| = -4\,\text{Ln}|x| + \text{Ln}|c|$$

$$\text{Ln}|1-2y^2| = -\,\text{Ln}|x^4| + \text{Ln}|c|$$

$$\text{Ln}|1-2y^2| = \text{Ln}\left|\frac{c}{x^4}\right|$$

$$1-2y^2 = \pm\frac{c}{x^4} \Rightarrow 2y^2 = 1 \pm \frac{c}{x^4}$$

$$y^2 = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{c}{x^4}\right)$$

3 $\tan^2 y \, dy = \sin^3 x \, dx$

الحل : -

SOL

$$\int \tan^2 y \, dy = \int \sin^3 x \, dx$$

$$\int (\sec^2 y - 1) \, dy = \int \sin^2 x \; \sin x \; dx$$

$$\int (\sec^2 y - 1) \, dy = \int (1 - \cos^2 x) \; \sin x \, dx$$

$$\int (\sec^2 y - 1) \, dy = \int \sin x \, dx - (-) \int \cos^2 x \; (-\sin x) \; dx$$

$$\tan y - y = -\cos + \frac{\cos^3 x}{3} + c$$

4 $\dfrac{dy}{dx} = \cos^2 x \, . \; \cos^2 y$

SOL

$$\frac{dy}{\cos^2 y} = \cos^2 x \, dx \;\Longrightarrow\; \int \frac{dy}{\cos^2 y} = \int \cos^2 x \, dx$$

$$\int \sec^2 y \; dy = \int \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) \, dx$$

$$\tan y = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) + c$$

5 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos x}{3y^2 + e^y}$

SOL

$$3y^2 + e^y \; dy = \cos x \, dx \;\Longrightarrow\; \int (3y^2 + e^y) dy = \int \cos x \, dx$$

$$\frac{3y^3}{3} + e^y = \sin x + c$$

$$y^3 + e^y = \sin x + c$$

Exam

حل المعادلة التفاضلية الآتية $\frac{dy}{dx} = -2x \tan y$

حيث ان $x = 0$ عندما $y = \frac{\pi}{2}$

SOL

الحل : -

$$\frac{dy}{dx} = -2x \tan y$$

$$\frac{dy}{\tan y} = -2x\,dx \Longrightarrow \frac{\cos y\,dy}{\sin y} = -2x\,dx$$

$$\int \frac{\cos y\,dy}{\sin y} = \int -2x\,dx$$

$$\operatorname{Ln}|\sin y| = \frac{-2x^2}{2} + c \Longrightarrow \operatorname{Ln}|\sin y| = -x^2 + c$$

عندما $x = 0$ ، $y = \frac{\pi}{2}$

$$\operatorname{Ln}\left|\sin\frac{\pi}{2}\right| = -(0)^2 + c \Longrightarrow \operatorname{Ln}|1| = c \Longrightarrow c = 0$$

$$\operatorname{Ln}|\sin y| = -x^2$$

بأخذ e للطرفين

$$\sin y = e^{-x^2}$$

حين تدق الأجراس

اعلم أن

النجاح قريب منك، يحتاج الى خطوات وإرادة
إذا شعرت أن المسافات بعيدة وبدأ اليأس يتسلل إليك، فكثف جهودك،
فهذه أول بوارق النجاح

ثانيا

المعادلات التفاضلية المتجانسة

قد تكون المعادلة التفاضلية ليست قابلة للفصل المتغيرات فيها ولكن قد تكون في الوقت نفسه بصورة معينة نستطيع تحويلها الى معادلة قابلة للـــــــــفصل وذلك باستخدام بعض التحويلات ومن هذه الصور المعادلة التفاضلية المتجانســــة وهي المعادلة التي يمكن كتابتها على الصورة :

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Exam بين أي المعادلات التفاضلية الآتية متجانسة ؟

1) $$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 + y^3}{3x^2 y}$$

SOL

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 + y^3}{3x^2 y} \qquad \div \quad x^3 \neq 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^3}{x^3} + \frac{y^3}{x^3}}{\frac{3x^2 y}{x^3}} = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3}{3\frac{y}{x}}$$

∴ المعادلة متجانسة .

2) $$2xyy' - y^2 + 2x^2 = 0$$

SOL

$$2xyy' - y^2 + 2x^2 = 0 \qquad \div \quad x^2$$

$$\frac{2x\,y}{x^2} - \frac{y^2}{x^2} + 2\frac{x^2}{x^2} = 0$$

$$2\left(\frac{y}{x}\right)y' - \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2 = 0$$

∴ المعادلة متجانسة.

❸ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - y}{x^3}$

هذه المعادلة غير متجانسة لأنها لا يمكن كتابتها بالصورة

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

طريقة حل المعادلة المتجانسة :

نتبع الخطوات الآتية

1. نكتبها بالصورة $\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$

ثم نعوض عن $v = \dfrac{y}{x}$ أو $y = v\,x$

حيث v متغير جديد وهو دالة x

2. نشتق $y = v\,x$ بالنسبة الى x فنحصل على $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{dv}{dx} + v$

3. بالربط بين ❶ و ❷ ينتج

$$x\frac{dv}{dx} + v = f(v) \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = f(v) - v$$

4. بعد فصل المتغيرات نحصل على $\dfrac{dv}{f(v)-v} = \dfrac{dx}{x}$

5. بأخذ تكامل الطرفين $\displaystyle\int \frac{dv}{f(v)-v} = \int \frac{dy}{x} + c$

نحصل على الحل العام بدلالة x ، v

6. نعوض بعد ذلك عن $v = \dfrac{y}{x}$ فنحصل على حل المعادلة بدلالة المتغيرين x ، y

07802543623

حل المعادلة التفاضلية $y' = \dfrac{3y^2 - x^2}{2xy}$

SOL

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy} \qquad \div \quad x^2 \neq 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3\frac{y^2}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}} = \frac{3(\frac{y}{x})^2 - 1}{2(\frac{y}{x})}$$

نعوض $v = \dfrac{y}{x}$ تصبح المعادلة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3v^2 - 1}{2v}$$

$$y = vx \qquad \frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

بالتعويض ينتج

$$x\frac{dv}{dx} + v = \frac{3v^2 - 1}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{3v^2 - 1}{2v} - v = \frac{3v^2 - 1 - 2v^2}{2v} = \frac{v^2 - 1}{2v}$$

$$\frac{1}{x}\,dx = \frac{2v}{v^2 - 1}\,dv$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{2v}{v^2 - 1}\,dv$$

$$\operatorname{Ln}|x| = \operatorname{Ln}|v^2 - 1| + \operatorname{Ln}|c|$$

$$\operatorname{Ln}|x| = \operatorname{Ln}|c(v^2 - 1)|$$

$$x = \pm c(v^2 - 1)$$

$$x = \pm c\left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right) \Rightarrow x = \pm c\left(\frac{y^2 - x^2}{x^2}\right)$$

$$c = \pm\left(\frac{x^3}{y^2 - x^2}\right)$$

حل المعادلة التفاضلية $\frac{dv}{dx} = \frac{y+x}{y-x}$

SOL

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+x}{y-x} \quad \div \quad x \neq 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}+\frac{x}{x}}{\frac{y}{x}-\frac{x}{x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}+1}{\frac{y}{x}-1}$$

نعوض $v = \frac{y}{x}$ تصبح المعادلة حيث $y = vx$

ينتج

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$$

$$x\frac{dv}{dx} + v = \frac{v+1}{v-1} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v+1}{v-1} - v$$

$$= \frac{v+1-v^2+v}{v-1} = \frac{2v+1-v^2}{v-1}$$

$$\frac{v-1}{2v+1-v^2}\, dv = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{-1}{2}\int \frac{-2(v-1)}{2v+1-v^2}\, dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{-1}{2}\ln|2v+1-v^2| = \ln|x| + \ln|c|$$

$$\ln|(2v-v^2+1)^{\frac{-1}{2}}| = \ln|xc|$$

$$\ln \frac{1}{\sqrt{2v-v^2+1}} = \ln|xc|$$

$$\frac{1}{\sqrt{2v-v^2+1}} = |xc|$$

$$\frac{1}{|xc|} = \sqrt{2v-v^2+1}$$

بتربيع الطرفين

$$\frac{1}{x^2c^2} = 2v-v^2+1$$

$$\frac{1}{c^2} = x^2(2v-v^2+1)$$

$$= x^2\left(2\frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2} + 1\right)$$

$$= 2xy - y^2 + x^2 \qquad x^2 + 2xy - y^2 = K$$

$$x^2 + 2xy - y^2 = K$$

حيث $K = \dfrac{1}{c^2}$

Exam

حل المعادلة التفاضلية $2xy\,y' - y^2 + x^2 = 0$

SOL

$$2xy\,y' - y^2 + x^2 = 0$$

$$2xy\,y' = y^2 - x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy} \qquad \div \; x^2 \neq 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y^2}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}} = \frac{(\frac{y}{x})^2 - 1}{2(\frac{y}{x})}$$

نعوض $v = \dfrac{y}{x}$ تصبح المعادلة $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{dv}{dx} + v$

بالتعويض ينتج

$$x\frac{dv}{dx} + v = \frac{v^2 - 1}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - 1}{2v} - v = \frac{v^2 - 1 - 2v^2}{2v} = \frac{-1 - v^2}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{-(1+v^2)}{2v} \Longrightarrow \frac{2v}{1+v^2}\,dv = \frac{-1}{x}\,dx$$

$$\int \frac{2v}{1+v^2}\,dv = -\int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\mathrm{Ln}\,|1 + v^2| = -\mathrm{Ln}\,|x| + \mathrm{Ln}\,|c|$$

$$\mathrm{Ln}\,|x(1 + v^2)| = \mathrm{Ln}\,|c|$$

$$c = \pm x(1 + v^2)$$

$$c = \pm x\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) \Longrightarrow c = \pm\left(x + \frac{y^2}{x}\right)$$

$$c = \pm\left(\frac{x^2 + y^2}{x}\right)$$

07802543623

حل المعادلة التفاضلية $(3x-y)\,y' = x+y$

Exam

SOL

$$y' = \left(\frac{x+y}{3x-y}\right) \qquad \div \quad x \neq 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x}{x}+\frac{y}{x}}{\frac{3x}{x}-\frac{y}{x}} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1+\frac{y}{x}}{3-\frac{y}{x}}$$

نعوض $v = \frac{y}{x}$ ينتج $\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$

$$x\frac{dv}{dx} + v = \frac{1+v}{3-v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v}{3-v} - v$$

$$= \frac{1+v-3v+v^2}{3-v} = \frac{v^2-2v+1}{3-v}$$

$$\frac{1}{x}\,dx = \frac{3-v}{v^2-2v+1}\,dv = \frac{3-v}{(v-1)^2}\,dv = \frac{-(v-1-2)}{(v-1)^2}\,dv$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{-(v-1)+2}{(v-1)^2}\,dv$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{-(v-1)}{(v-1)^2}\,dv + \int \frac{2}{(v-1)^2}\,dv$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{-1}{(v-1)}\,dv + \int 2(v-1)^{-2}\,dv$$

$$\text{Ln}\,|x| = -\text{Ln}\,|v-1| + \frac{2(v-1)^{-1}}{-1} + c$$

$$\text{Ln}\,|x| + \text{Ln}\,|v-1| = \frac{-2}{v-1} + c$$

$$\text{Ln}\,|x(v-1)| = \frac{-2}{v-1} + c$$

$$\text{Ln}\,\left|x\left(\frac{y}{x}-1\right)\right| = \frac{-2}{\frac{y}{x}-1} + c$$

$$\text{Ln}\,|y-x| = \frac{-2x}{y-x} + c$$

07802543623

Exam

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $2x^2\dfrac{dy}{dx} = x^2 + y^2$

SOL

$$2x^2\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{2x^2} \qquad \div \; x^2 \neq 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}} = \frac{1+(\frac{y}{x})^2}{2}$$

نعوض $v = \dfrac{y}{x}$ تصبح المعادلة $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{dv}{dx} + v$

ينتج $x\dfrac{dv}{dx} + v = \dfrac{1+v^2}{2}$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{2} - v = \frac{1+v^2-2v}{2} = \frac{v^2-2v+1}{2}$$

$$2x\frac{dv}{dx} = (v-1)^2 \Rightarrow \frac{dv}{(v-1)^2} = \frac{1}{2x}dx$$

$$\int \frac{dv}{(v-1)^2} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}$$

$$\int (v-1)^{-2}\,dv = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}$$

$$\frac{(v-1)^{-1}}{-1} = \frac{1}{2}\text{Ln}|x| + c \Rightarrow \frac{-1}{(v-1)} = \frac{1}{2}\text{Ln}|x| + c$$

$$v-1 = \frac{-1}{\frac{1}{2}\text{Ln}|x|+c} = \frac{-2}{\text{Ln}|x|+2c}$$

$$v = 1 - \frac{2}{\text{Ln}|x|+2c} = 1 - \frac{2}{\text{Ln}|x|+c_1}$$

$$\frac{y}{x} = 1 - \frac{2}{\text{Ln}|x|+c_1}$$

$$y = x - \frac{2x}{\text{Ln}|x|+c_1}$$

Exam

حل المعادلة التفاضلية $y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$

SOL

نعوض $v = \frac{y}{x}$ تصبح المعادلة $\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$

$$x\frac{dv}{dx} + v = v + e^{v}$$

$$\frac{dv}{e^{v}} = \frac{1}{x}\,dx \Rightarrow \int \frac{dv}{e^{v}} = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$-\int -e^{-v}dv = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$-e^{\frac{-y}{x}} = \text{Ln}\,|x| + c \Rightarrow \frac{1}{-e^{\frac{-y}{x}}} = \text{Ln}\,|x| + c$$

$$e^{\frac{y}{x}} = \frac{-1}{\text{Ln}\,|x| + c}$$

Exam

حل المعادلة التفاضلية $x^2 y\,dx = x^3 + y^3\,dy$

SOL

$$x^2 y\,dx = x^3 + y^3\,dy$$

$$\frac{x^2 y}{x^3 + y^3} = \frac{dy}{dx} \qquad \div\ x^3 \neq 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2 y}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} + \frac{y^3}{x^3}} = \frac{\frac{y}{x}}{1+(\frac{y}{x})^3}$$

نعوض $v = \frac{y}{x}$ تصبح المعادلة $\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$

ينتج $x\frac{dv}{dx} + v = \frac{v}{1+v^3}$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{1+v^3} - v = \frac{v-v-v^4}{1+v^3} = \frac{-v^4}{1+v^3}$$

$$\frac{1+v^{3}}{v^{4}} dv = \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{1+v^{3}}{v^{4}} dv = \int \frac{-dx}{x}$$

$$\int v^{-4} + \frac{1}{v} \; dv = \int \frac{-1}{x} \; dx$$

$$\frac{v^{-3}}{-3} + \text{Ln}\,|v| = -\,\text{Ln}\,|x| + c$$

$$\frac{v^{-3}}{-3} + \text{Ln}\,|v| + \text{Ln}\,|x| = c$$

$$\frac{-1}{3v^{3}} + \text{Ln}\,|v| + \text{Ln}\,|x| = c$$

$$\frac{-1}{3\frac{y^{3}}{x^{3}}} + \text{Ln}\left|\frac{y}{x}\right| + \text{Ln}\,|x| = c$$

$$\frac{-x^{3}}{3y^{3}} + \text{Ln}\left|x \cdot \frac{y}{x}\right| = c$$

$$\text{Ln}\,|y| - \frac{x^{3}}{3y^{3}} = c$$

Exam

حل المعادلة التفاضلية $x\frac{dy}{dx} - \tan\frac{y}{x} = y$

SOL

$$\frac{dy}{dx} - \tan\frac{y}{x} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan\frac{y}{x} + \frac{y}{x}$$

نعوض $v = \frac{y}{x}$ تصبح المعادلة $\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$

$$x\frac{dv}{dx} + v = \tan v + v$$

$$x\frac{dv}{dx} = \tan v + v - v = \tan v$$

$$\int \frac{dv}{\tan v} = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{\cos v}{\sin v} dv = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\text{Ln}\,|\sin v| = \text{Ln}\,|x| + \text{Ln}\,|c|$$
$$\text{Ln}\,|\sin v| = \text{Ln}\,|x\,c| \Rightarrow \sin v = \pm\, x\,c$$
$$\sin \frac{y}{x} = \pm\, x\,c$$

Exam

حل المعادلة التفاضلية $(x^2 + 3y^2)\,dx = 2xy\,dy$

SOL

$$x^2 + 3y^2 = 2xy\frac{dy}{dx}$$
$$\frac{x^2 + 3y^2}{2xy} = \frac{dy}{dx} \qquad \div\ x^2 \neq 0$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2}{x^2} + 3\frac{y^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}} = \frac{1+3\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

نعوض $v = \frac{y}{x}$ تصبح المعادلة $\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$

ينتج $x\frac{dv}{dx} + v = \frac{1+3v^2}{2v}$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+3v^2}{2v} - v = \frac{1+3v^2-2v^2}{2v} = \frac{v^2+1}{2v}$$
$$\frac{2v}{v^2+1}\,dv = \frac{dx}{x}$$
$$\int \frac{2v}{v^2+1}\,dv = \int \frac{dx}{x}$$
$$\text{Ln}\,|1+v^2| = \text{Ln}\,|x| + \text{Ln}\,|c|$$
$$\text{Ln}\,|1+v^2| = \text{Ln}\,|x\,c|$$
$$1+v^2 = \pm\, x\,c$$
$$1 + \frac{y^2}{x^2} = \pm\, x\,c \Rightarrow \frac{y^2}{x^2} = \pm\, x\,c - 1$$
$$y^2 = \pm\, c\,x^3 - x^2$$

بالتوفيق والنجاح

الأستاذ

حسين عبد زيد

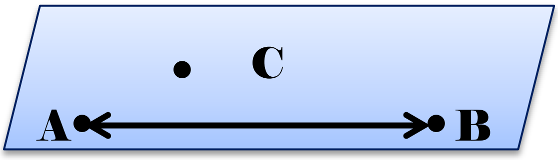
07802543623

مراجعة للصف الخامس العلمي

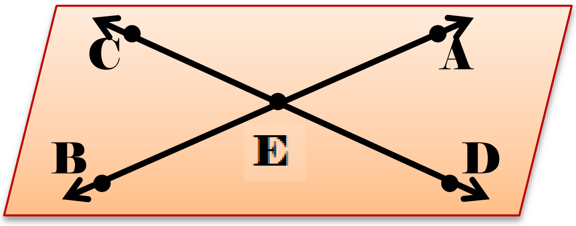
عبـــارة اوليـــة

لكل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة Non – collinear (وحيدة) يحويها

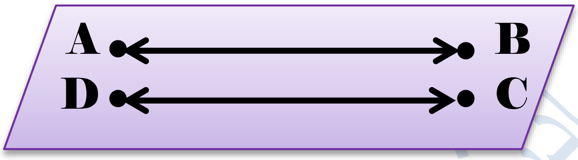
ومنها نحصل على



1. لكل مستقيم ونقطة لا تنتمي اليه يوجد مستوي وحيد يحويها

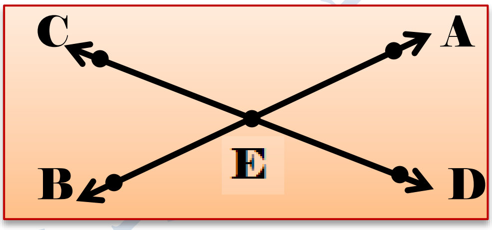


2. لكل مستقيم ونقطة لا تنتمي اليه يوجد مستوي وحيد يحويها

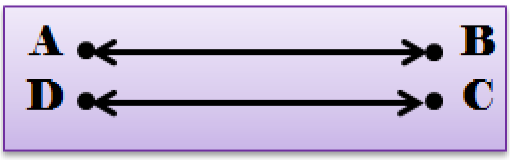


3. لكل مستقيمين متوازيين يوجد مستوي وحيد يحويهما

العلاقة بين مستقيمين في الفضاء



1. المستقيمين المتقاطعان Intersecting Lines اللذان يشتركان بنقطة واحدة فقط وهمـــا في مستوي واحد

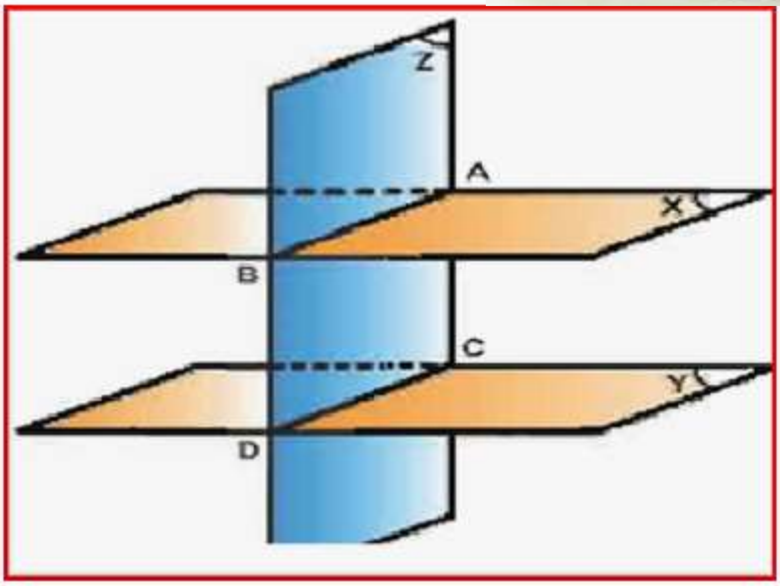


2. المستقيمين المتوازيان Parallel Lines اذا لم يشتركا بنقطة وهما في نقطة واحدة

مبرهنة 1

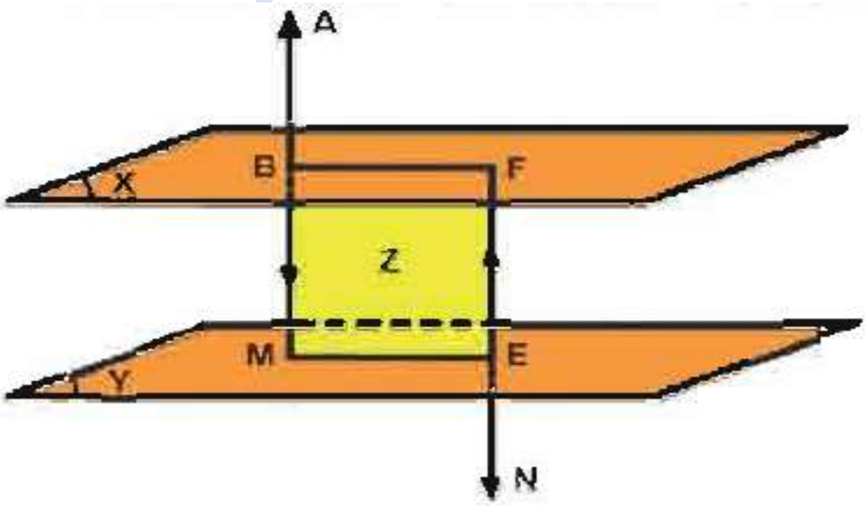
خطا تقاطع مستويين متوازيين بمستوٍ ثالث متوازيين

$(X) // (Y)$
$(X) \cap (Z) = A B$
$(Y) \cap (Z) = C D$



نتيجة مبرهنة 1

المستقيم الذي يقطع احد مستويين متوازيين يقطع الاخر.

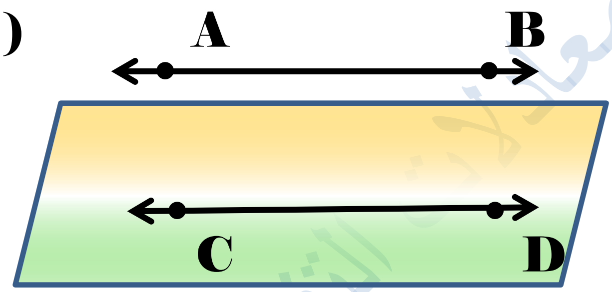


مبرهنة 2

اذ توازى مستقيمان فالمستوي الذي يحوي احدهما يوازي الاخر.

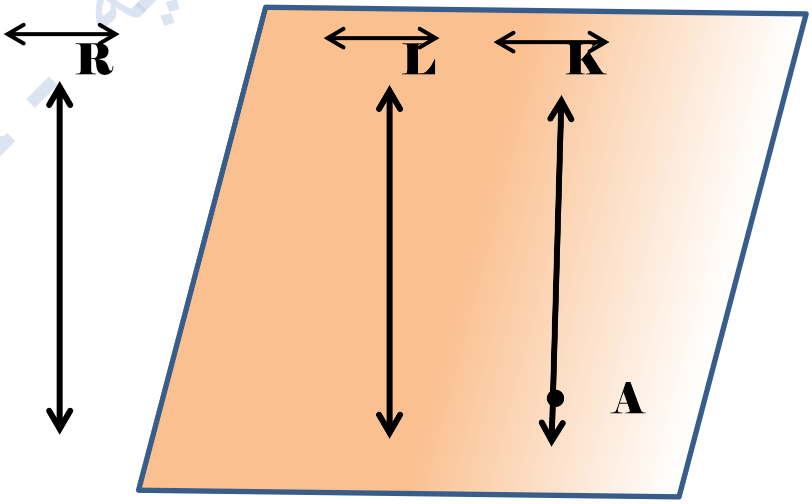
$$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD} \; , \; \overleftrightarrow{CD} \subset (X)$$

$$\overleftrightarrow{AB} \parallel (X)$$



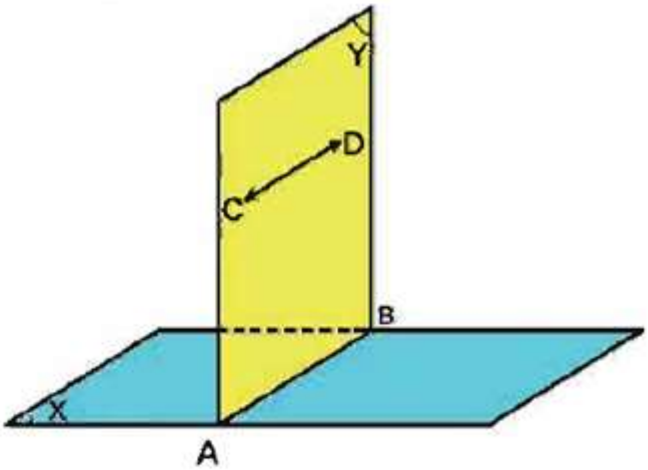
مبرهنة 3

المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث (في الفراغ) متوازيان.



مبرهنة 4

مستقيم تقاطع مستويين يوازي كل مستقيم
محتوي في احدهما ويوازي الاخر



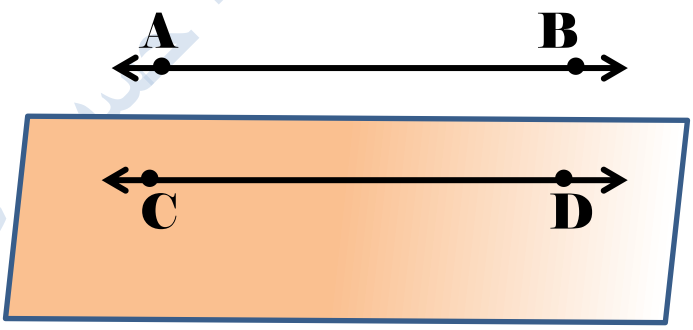
$$(X)\cap(Y)=\overleftrightarrow{AB}$$

$$\overleftrightarrow{CD}\subset(Y)\quad \overleftrightarrow{CD}//(X)$$

$$\overleftrightarrow{AB}//\overleftrightarrow{CD}$$

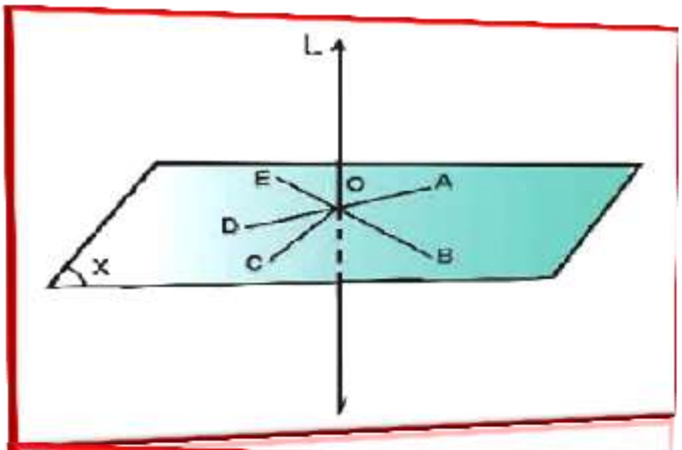
نتيجـــة مبرهنة 4:

اذا وازى مستقيم مستويا معلوما فالمستقيم المرسوم
من اية نقطة من نقاط المستوي موازيا للمستقيم المعلوم يكون
محتوى في المستوي

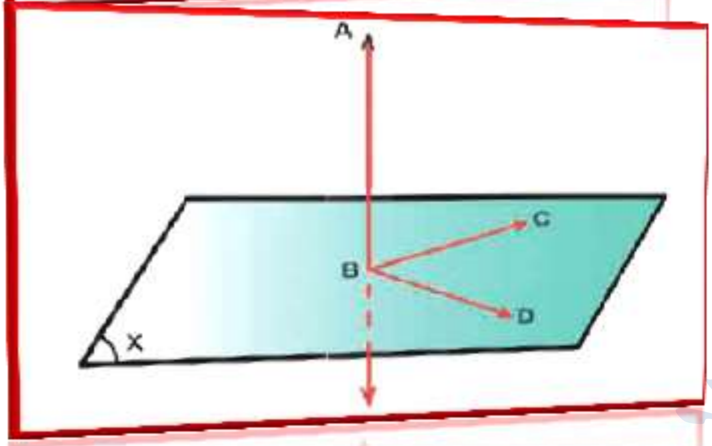


تعاريف

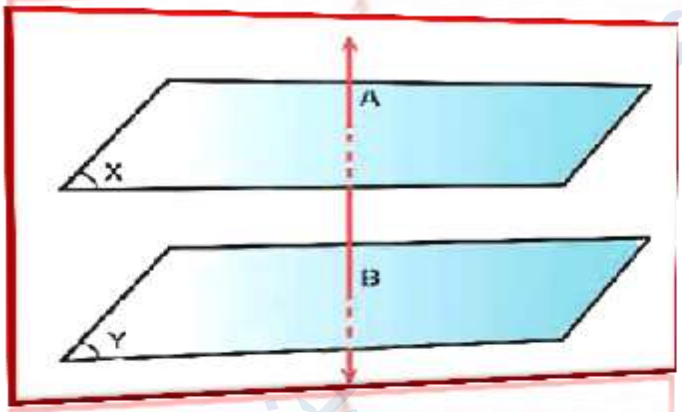
1. المستقيم العمودي على مستوٍ يكون عموديا على جميـــــــــع المستقيمات المرسومة من اثره ضمن ذلك المستوي



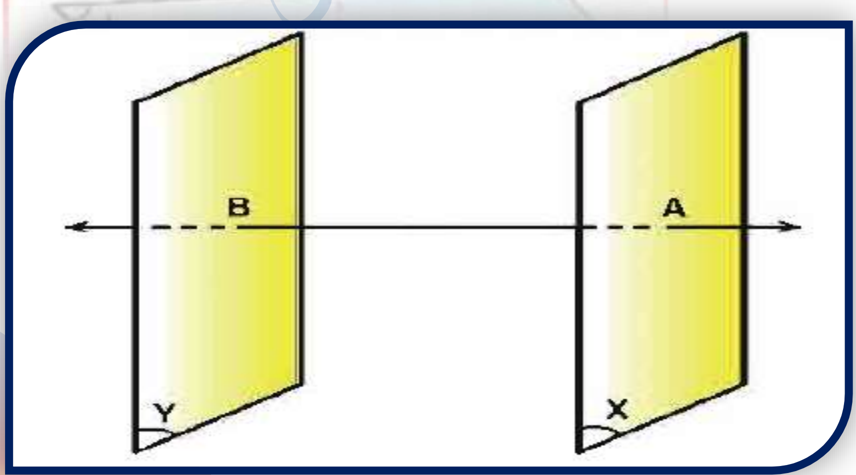
2. المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكـــون عموديا على مستويهما



3. المستقيم العمودي على احد مستويين متوازيين يكون عموديا على الاخر

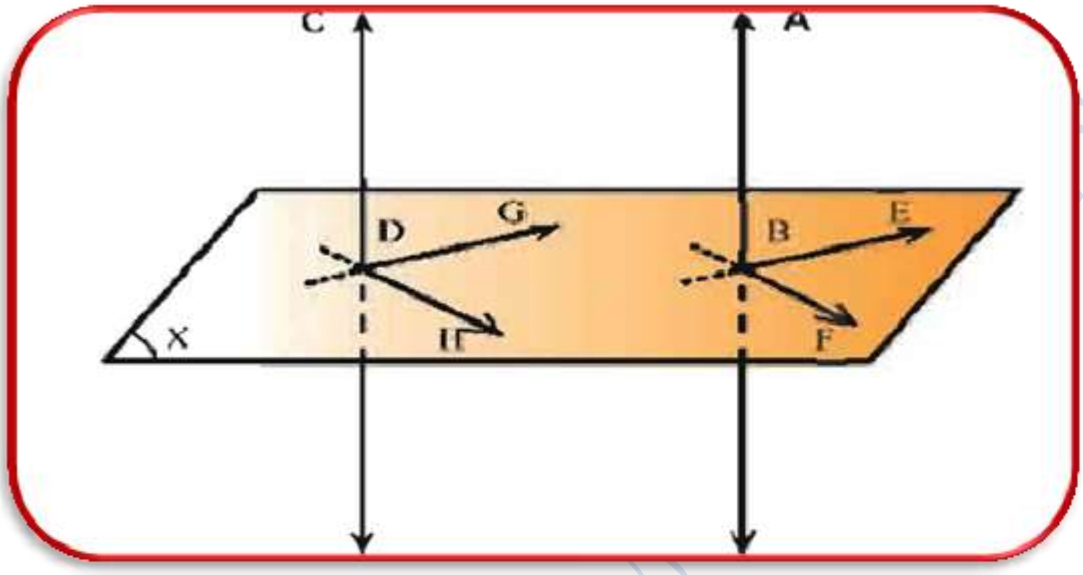


4. المستويان العموديان على مستقيم واحد متوازيان



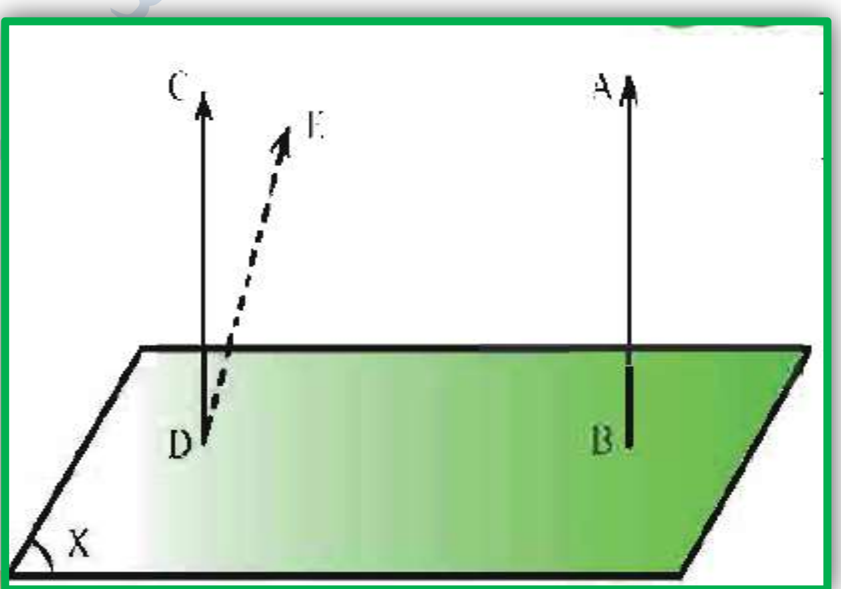
مبرهنة 5

المستوي العمودي على احد مستقيمين متوازيين يكون عموديا على الاخر



نتيجـــة مبرهنة 5 :

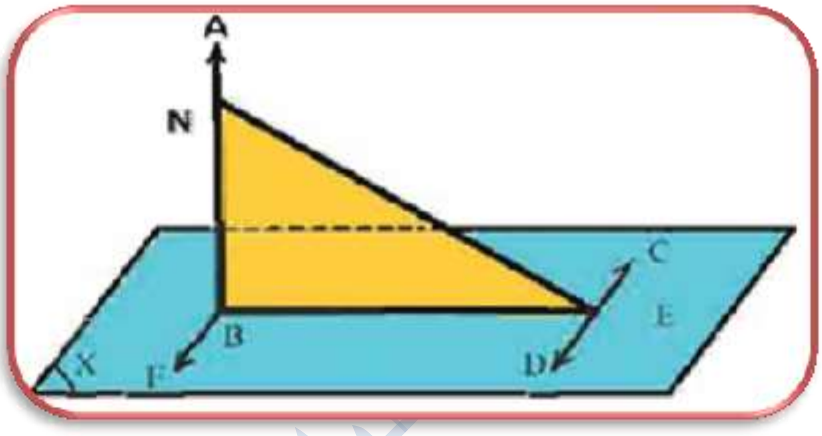
المستقيمان العموديان على مستوٍ واحد متوازيان



مبرهنة 6

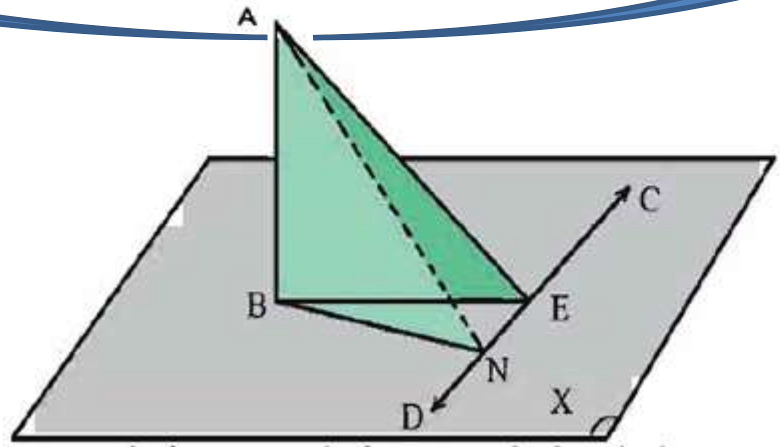
مبرهنة الاعمدة الثلاث

اذا رسم من نقطة في مستوي مستقيمان احدهما عمودي على مستوي والأخر عمودي على مستقيم معلوم في المستوي . فالمستقيم الواصل بين اية نقطة من نقاط المستقيم العمودي على المستوي ونقطة تلاقي المستقيمين يكـــون عموديا على المستقيم المعلوم في المستوي



نتيجـــة مبرهنة 6

اذا رسم من نقطة لا تنتمي من مستو معلوم مستقيمان احدهما عمودي على و الأخر عمودي على مستقيم معلوم في المستوي . فالمستقيم الواصل بين اثري على العمودين يكون عمودي على المستقيم المعلوم في المستوي



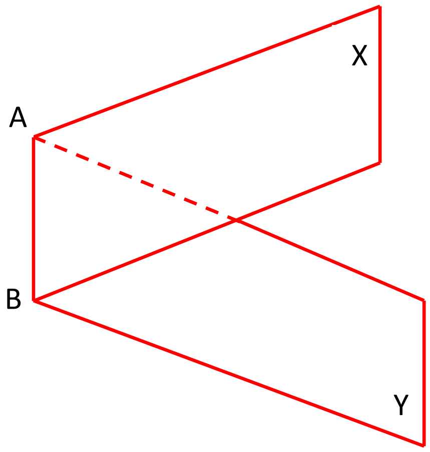
$A \notin (X)$, $\overleftrightarrow{CD} \subset (X)$, $\overleftrightarrow{AB} \perp (X)$, $\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{CD}$

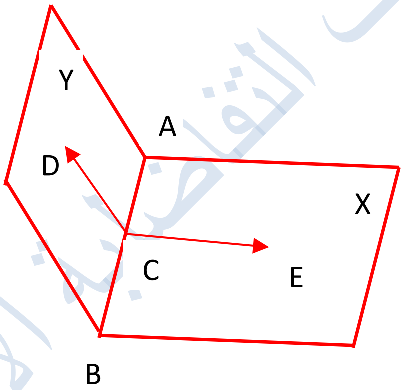
تعاريف

الزاوية الزوجية : هي اتحاد مستويين لهما حافة مشتركة (حرفالزاوية الزوجية) ويسمى كل من المستويين وجه الزاوية الزوجية

$\overleftrightarrow{AB}$ حرف الزاوية الزوجية ، (X) , (Y) وجها الزاوية الزوجية

ونرمز لها : $(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$ ، أو بدلالة حرفها $\overleftrightarrow{AB}$





الزاوية المستوية العائدة للزاوية الزوجية:

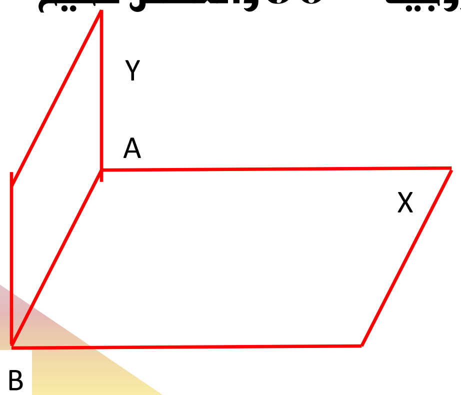
هي الزاوية التي ضلعاها عموديان على حرف الزاوية الزوجية وكل منهما في احد وجهي الزاوية الزوجية

$\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$ ، $\overleftrightarrow{CE} \perp \overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CE} \subset (X)$

الزاوية $\measuredangle DCE$ زاوية عائدة للزاوية الزوجية $(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$

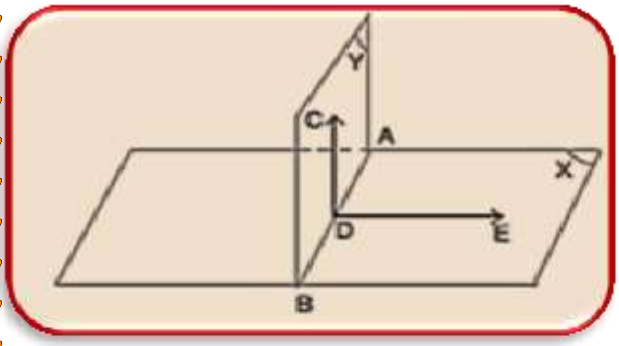
قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة وبالعكس

إذا كان المستويان متعامدان فان قياس الزاوية الزوجية = 90° والعكس صحيح



مبرهنة 7

اذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في احدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون عموديا على المستوي الأخر .



اي انه:

اذا كان $(X) \perp (Y)$

$(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}$

$\overleftrightarrow{CD} \subset (Y), \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$

في D

فان $\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

المعطيات: $(X) \perp (Y)$, $(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD} \subset (Y), \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ في نقطة D

المطلوب اثباته: $\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

البرهان:

في (X) نرسم $\overleftrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{AB}$ (في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم فيه من نقطة معلومة)

$\overleftrightarrow{CD} \subset (Y), \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ (معطى)

$\therefore \angle CDE$ عائدة للزاوية الزوجية $(Y) - \overleftrightarrow{AB} - (X)$ (تعريف الزاوية العائدة)

$\therefore m\angle CDE = 90^\circ$ (قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس)

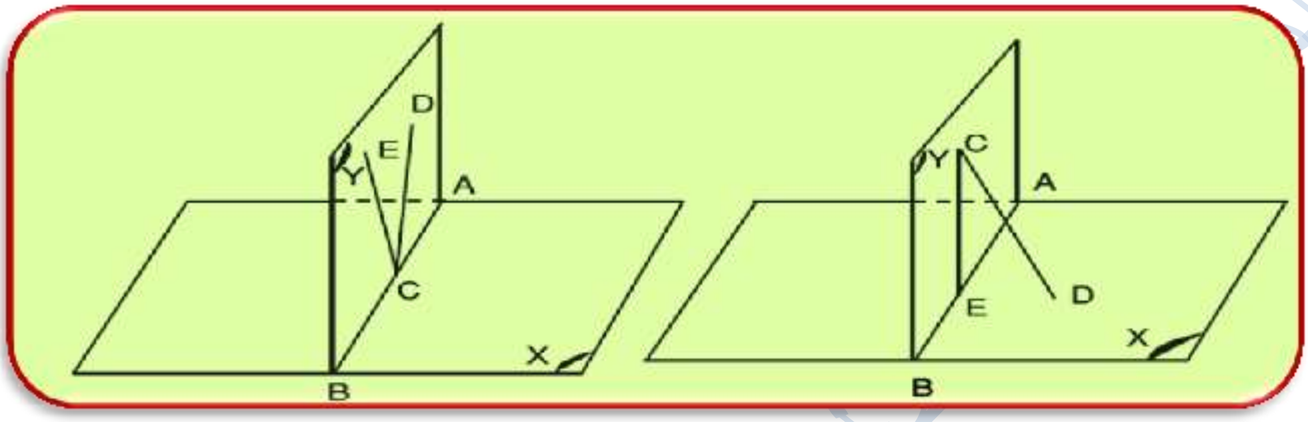
$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{DE}$ (اذا كان قياس الزاوية بين مستقيمين 90° فان المستقيمين متعامدان وبالعكس)

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp (X)$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

و . هـ . م

نتيجـــة مبرهنة 7

اذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم من نقطة في احدهما عموديا على المستوي الاخر يكون محتوي فيه



المعطيات : $\overleftrightarrow{CD} \perp (X), C \in (Y), (Y) \perp (X)$

المطلوب : $\overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$

البرهان : ليكن $(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}$

(اذا تقاطع مستويان فأن مجموعة التقاطع مستقيم)

نرسم $\overleftrightarrow{CE} \subset (Y)$ بحيث $\overleftrightarrow{CE} \perp \overleftrightarrow{AB}$

(في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة)

$\because (Y) \perp (X)$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{CE} \perp (X)$ (مبرهنة 7)

$\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{CE} = \overleftrightarrow{CD}$

(يمكن رسم مستقيم وحيد عمود على مستوٍ معلوم من نقطة معلومة)

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$

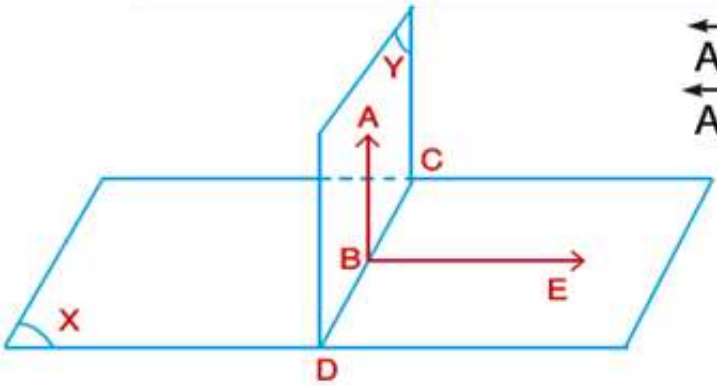
(و.هـ.م .)

مبرهنة 8

كل مستوي مار بمستقيم عمودي على اخر يكون عموديا على ذلك المستوي او يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الاخر

اي انه:

$$\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{AB} \perp (X) \\ \overleftrightarrow{AB} \subset (Y)\end{array}\right\} \Rightarrow (Y) \perp (X)$$



المعطيات:

$\overleftrightarrow{AB} \perp (X)$

$\overleftrightarrow{AB} \subset (Y)$

المطلوب اثباته:

$(Y) \perp (X)$

البرهان:

ليكن $(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{CD}$ (يتقاطع المستويان بخط مستقيم)

$B \in \overleftrightarrow{CD}$ (مستقيم التقاطع يحتوي النقاط المشتركة)

في (X) نرسم $\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD}$ (في المستوي الواحد يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستقيم فيه من نقطة معلومة)

$\because \overleftrightarrow{AB} \perp (X)$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{BE}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المحتواة في المستوي والمارة من أثره)

$\because \overleftrightarrow{AB} \subset (Y)$ (معطى)

$\therefore \measuredangle ABE$ عائدة للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{CD}$ (تعريف الزاوية العائدة)

$m \measuredangle ABE = 90^\circ$ (لان $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BE}$)

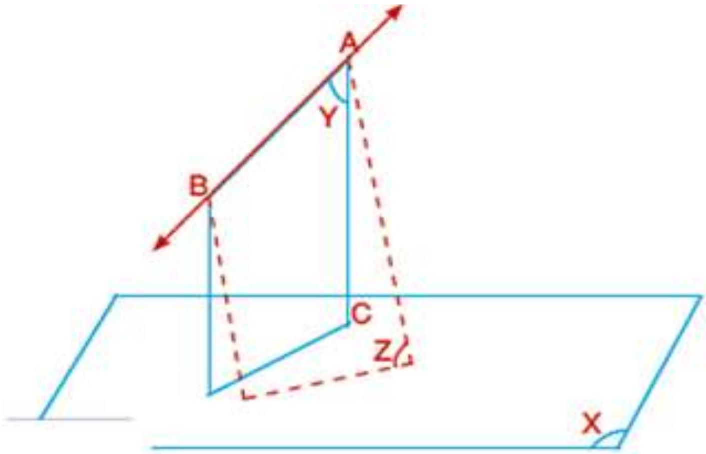
$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية $(Y) - \overleftrightarrow{CD} - (X) = 90^\circ$ (قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس)

$\therefore (Y) \perp (X)$ (اذا كان قياس الزاوية الزوجية 90° فان المستويين متعامدان وبالعكس)

و . هـ . م

مبرهنة 9

من مستقيم غير عمودي على مستو معلوم يوجد مستو وحيد عمودي على المستوي المعلوم



اي انه:

$\overleftrightarrow{AB}$ غير عمودي على (X)

فيوجد مستوي وحيد يحتوي $\overleftrightarrow{AB}$

وعمودي على (X)

المعطيات:

$\overleftrightarrow{AB}$ غير عمودي على (X)

المطلوب اثباته:

ايجاد مستوٍ وحيد يحوي $\overleftrightarrow{AB}$ وعمودي على (X)

البرهان:

من نقطة (A) نرسم $\overleftrightarrow{AC} \perp (X)$ (يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة لا تنتمي اليه)

$\because$ $\overleftrightarrow{AC}$ ، $\overleftrightarrow{AB}$ متقاطعان

$\therefore$ يوجد مستوٍ وحيد مثل (Y) يحويهما (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما)

$\therefore$ $(Y) \perp (X)$ (مبرهنة 8)

ولبرهنة الوحدانية:

ليكن (Z) مستوي اخر يحوي $\overleftrightarrow{AB}$ وعمودي على (X)

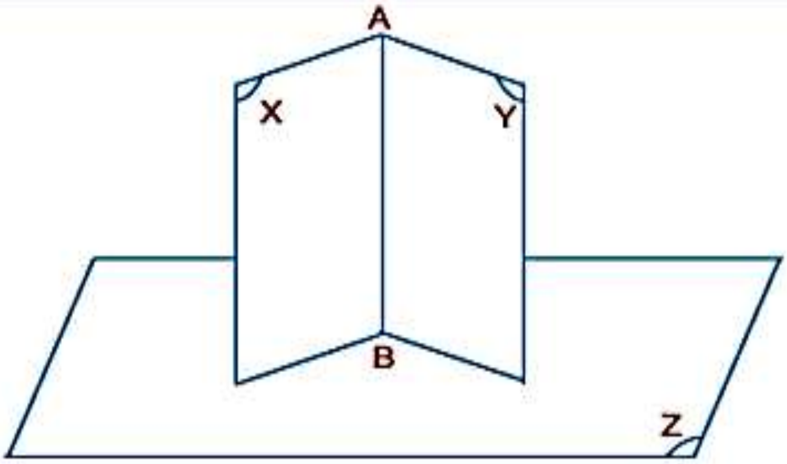
$\because$ $\overleftrightarrow{AC} \perp (X)$ (بالبرهان)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AC} \subset (Z)$ (نتيجة مبرهنة 7)

$\therefore$ $(Y) = (Z)$ (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما) و.هـ.م

نتيجــة مبرهنة 9

اذا كان كل من مستويين متقاطعين عموديا على مستو ثالث
فان مستقيم تقاطعهما يكون عموديا على المستوي الثالث



المعطيات:

$(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}$

$(X),(Y) \perp (Z)$

المطلوب اثباته:

$\overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$

البرهان:

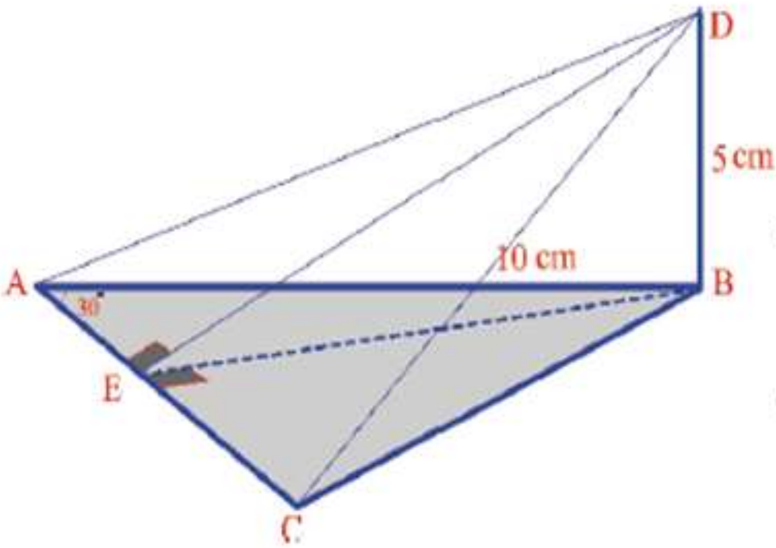
ان لم يكن $\overleftrightarrow{AB}$ عمودياً على (Z)

لما وجد اكثر من مستوي يحوي $\overleftrightarrow{AB}$ وعمودي على (Z) (مبرهنة 9)

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$

و . هـ . م

مثال 1



في $\triangle ABC$

$\overline{BD} \perp (ABC)$, $m\measuredangle A = 30°$

$AB = 10$ cm , $BD = 5$cm

جد قياس الزاوية الزوجية $D - \overline{AC} - B$

المعطيات:

$\overline{BD} \perp (ABC)$, $m\measuredangle BAC = 30°$, $AB = 10$ cm, $BD = 5$ cm

البرهان:

في المستوي (ABC) نرسم $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ في نقطة E (في المستوي الواحد يوجد مستقيم وحيد عمودي على آخر من نقطة معلومة)

$\because \overline{BD} \perp (ABC)$ (معطى)

$\therefore \overline{DE} \perp \overline{AC}$ (مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

$\Leftarrow \sphericalangle DEB$ عائدة للزاوية الزوجية $\overline{AC}$ (تعريف الزاوية العائدة)

$\overline{DB} \perp \overline{BE}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عموديا على جميع المستقيمات المحتواة في المستوي والمارة من اثره)

$\Leftarrow \triangle DBE$ قائم الزاوية في B

في $\triangle BEA$ القائم الزاوية في E

$$\sin 30^\circ = \frac{BE}{BA} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BE}{10} \Rightarrow BE = 5cm$$

في $\triangle DBE$ القائم الزاوية في B:

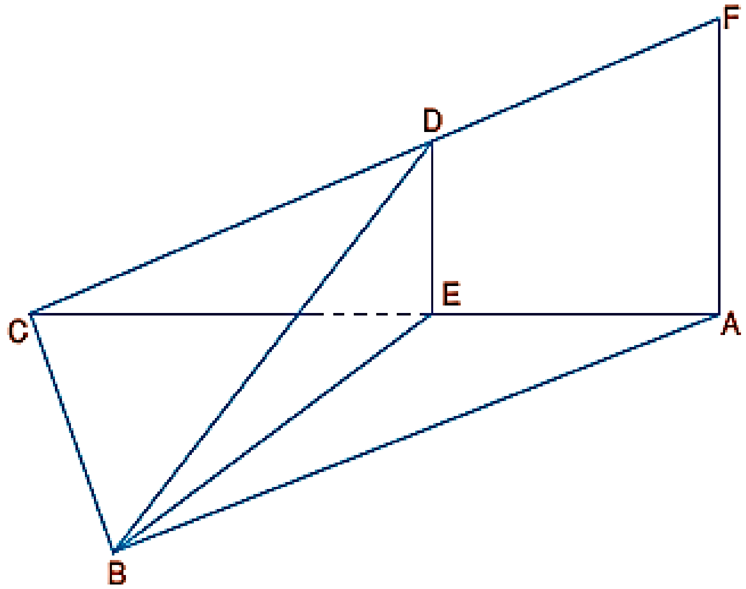
$$\tan(BED) = \frac{5}{5} = 1$$

$\therefore$ قياس $m\sphericalangle BED = 45^\circ$

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية $D - \overline{AC} - B = 45^\circ$ (قياس الزاوية الزوجية هو قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس)

و.هـ.م

مثال 2



ليكن ABC مثلثاً وليكن

$\overline{AF} \perp (ABC)$

$\overline{BD} \perp \overline{CF}$

$\overline{BE} \perp \overline{CA}$

برهن ان:

$\overline{BE} \perp (CAF)$

$\overline{ED} \perp \overline{CF}$

المعطيات:

$\overline{AF} \perp (ABC), \overline{BE} \perp \overline{CA}, \overline{BD} \perp \overline{CF}$

المطلوب اثباته:

$\overline{DE} \perp \overline{CF}, \overline{BE} \perp (CAF)$

البرهان:

$\because$ $\overline{AF} \perp (ABC)$ (معطى)

$\therefore (CAF) \perp (ABC)$ (مبرهنة 8 :يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الآخر)

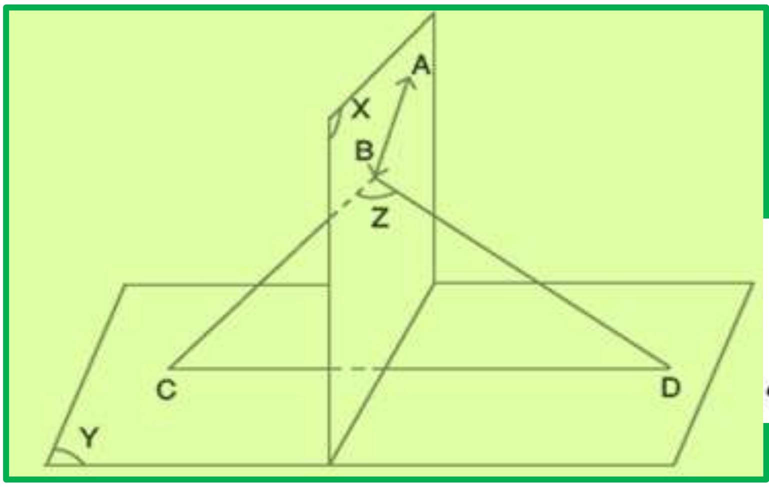
$\because$ $\overline{BE} \perp \overline{CA}$ (معطى)

$\therefore \overline{BE} \perp (CAF)$ (مبرهنة 7: اذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في احدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون عمودياً على الآخر)

$\because$ $\overline{BD} \perp \overline{CF}$ (معطى)

$\therefore \overline{ED} \perp \overline{CF}$ (نتيجة مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

مثال 3



$(X),(Y)$ مستويان متعامدان

$(X),(Y)$ مستويان متعامدان

$\overleftrightarrow{AB} \subset (X)$

$\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BD}$ عموديان على $\overleftrightarrow{AB}$

ويقطعان (Y) في C,D على الترتيب

$\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

المعطيات:

إن $(X) \perp (Y)$، $\overleftrightarrow{AB} \subset (X)$، $\overleftrightarrow{BD}$، $\overleftrightarrow{BC}$ عموديين على $\overleftrightarrow{AB}$ ويقطعان (Y) في C,D على الترتيب

المطلوب اثباته:

$\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

البرهان:

ليكن (Z) مستوي المستقيمين المتقاطعين $\overleftrightarrow{BD}$، $\overleftrightarrow{BC}$ (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوياً وحيداً يحويهما)

بما ان $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BD}$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$

(المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

$\because \overleftrightarrow{AB} \subset (X)$ (معطى)

$\therefore (X) \perp (Z)$ (يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الآخر)

$\because (X) \perp (Y)$ (معطى)

ولما كان $(Z) \cap (Y) = \overleftrightarrow{CD}$ (لانه محتوى في كل منهما)

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

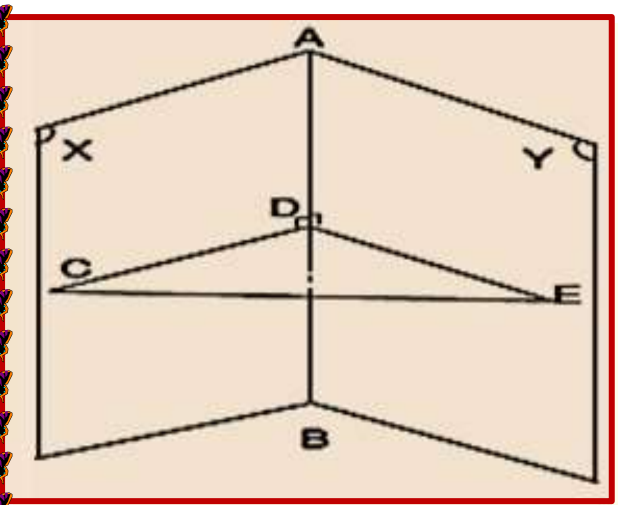
(اذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودياً على مستوٍ ثالث فان مستقيم تقاطعهما يكون عمودياً على المستوي الثالث)

و . هـ . م

تمارين 1 - 6

س 1

برهن ان مستوي الزاوية المستوية الحادة لزاوية زوجية يكون عموديا على حرفها



المعطيات

CDE زاوية عائدة للزاوية الزوجية

$(X)-\overline{AB}-(Y)$

المطلوب

$(CDE)\perp\overline{AB}$

البرهان

$\overline{CD}\perp\overline{AB}$

$\overline{ED}\perp\overline{AB}$ (تعريف الزاوية العائدة)

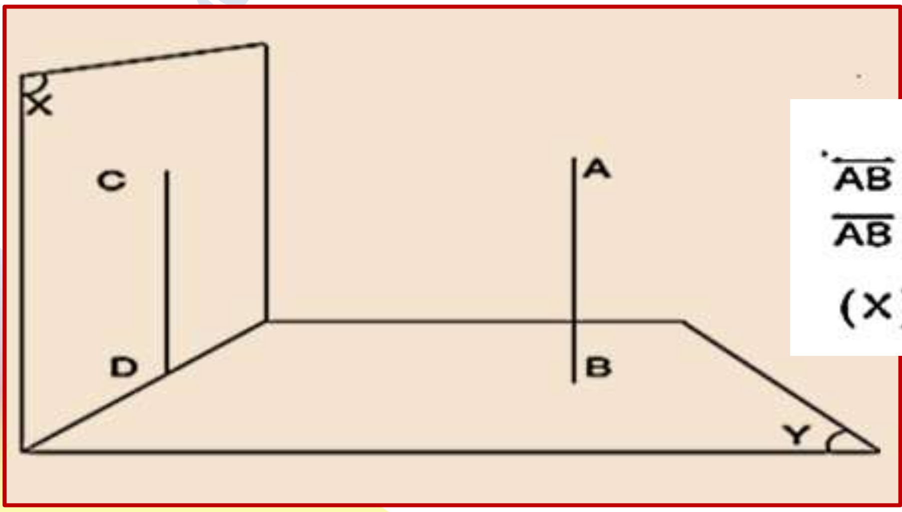
$\therefore (CDE)\perp\overline{AB}$

(المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

و. هـ. م

س 2

برهن انه اذا وازى مستقيم مستويا وكان عموديا على مستوي اخر فان المستويان متعامدان



المعطيات

$\overline{AB}//(X)$

$\overline{AB}\perp(Y)$

المطلوب

$(X)\perp(Y)$

البرهان : لتكن $C \in (X)$

نرسم $\overline{CD} \perp (Y)$

(يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة معلومة)

$\because \overline{AB} \perp (Y)$ (معطى) $\Rightarrow \overline{AB} // \overline{CD}$

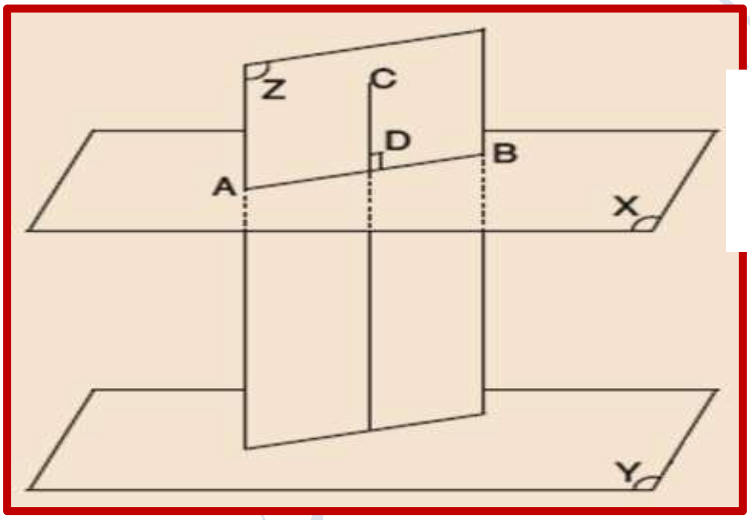
(المستقيمان العموديان على مستوٍ واحد متوازيان)

$\because C \in (X) \Rightarrow \overline{CD} \subset (X)$

(اذا وازى مستقيم مستوياً فالمستقيم المرسوم من نقطة من نقط المستوي موازياً للمستقيم المعلوم يكون محتوى في المستوي)

$\therefore (X) \perp (Y)$ (مبرهنة 8) و . هـ . م

س 3 برهن ان المستوي العمودي على احد مستويين متوازيين يكون عموديا على الآخر ايضا



المعطيات $(X) // (Y), (Z) \perp (X)$

المطلوب $(Z) \perp (Y)$

البرهان ليكن $(Z) \cap (X) = \overline{AB}$ (اذا تقاطع مستويان فان المجموعة التقاطع مستقيم)

لتكن $C \in (Z)$ ، نرسم $\overline{CD} \subset (Z)$ بحيث $\overline{CD} \perp \overline{AB}$

(في المستوي الواحد : يمكن رسم مستقيم واحد فقط عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة)

$\because (Z) \perp (X)$ (معطى) $\Rightarrow \overline{CD} \perp (X)$ (مبرهنة 7)

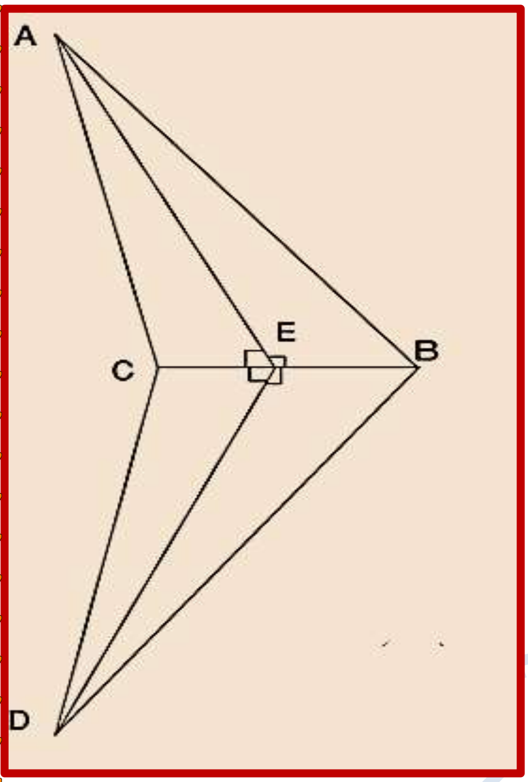
$\because (X) // (Y)$ (معطى) $\Rightarrow \overline{CD} \perp (Y)$

(المستقيم العمود على احد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الآخر)

$\therefore (Z) \perp (Y)$ (مبرهنة 8)

س 4

A, B, C, D اربع نقاط في مستوي واحد بحيث $AB=AC$ ، $E \in \overleftrightarrow{BC}$
فاذا كانت الزاوية AED عائدة للزاوية الزوجية $A-\overleftrightarrow{BC}-D$
برهن ان $CD = BD$



المعطيات: A,B,C,D أربع نقاط ليست في مستوٍ واحد
$E \in \overline{BC}$, $AB = AC$
$\measuredangle AED$ عائدة للزاوية الزوجية $A-\overline{BC}-D$

المطلوب: $CD = BD$

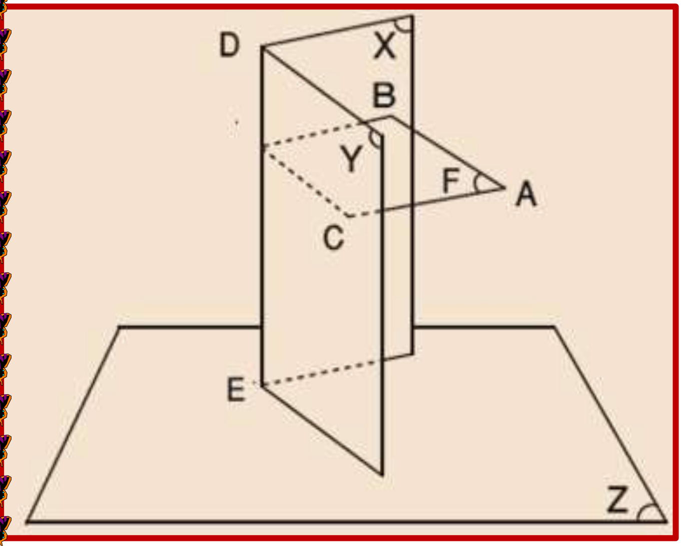
البرهان: في ΔABC $AB = AC$ (معطى)
$\because \overline{AE} \perp \overline{BC}$ (تعريف العائدة)
$\therefore E$ منتصف $\overline{BC}$

(العمود المرسوم من رأس مثلث متساوي الساقين على القاعدة ينصفها)

في المثلثين CED, BED
$\overline{DE}$ (مشترك)
$CE = BE$ (بالبرهان)
$\measuredangle BED = \measuredangle CED$ قوائم (تعريف العائدة)
$\therefore$ يتطابق المثلثان (لتساوي ضلعين والزاوية المحصورة بينهما)
وينتج $CD = BD$ و.هـ.م

س 5

برهن اذا وازى كل من مستقيمين متقاطعين مستويا معلوما وكانا عمودين على مستويين متقاطعين فان مستقيم تقاطع المستويين المتقاطعين يكون عموديا على المستوي المعلوم



المعطيات

$\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{Ac} // (Z)$

$\overleftrightarrow{AB} \perp (X), \overleftrightarrow{AC} \perp (Y), (X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{DE}$

المطلوب

$\overleftrightarrow{DE} \perp (Z)$

البرهان

$\because \overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AC}$ متقاطعان

$\therefore$ يوجد مستوٍ وحيد مثل (F) يحويهما (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما)

$\therefore (F) // (Z)$

(اذا وازى كل من مستقيمين متقاطعين مستوياً فان مستوٍ يهما يوازي ذلك المستوي)

$\because \overleftrightarrow{AB}, \perp (X)$ (معطى) $\Rightarrow (F) \perp (X)$

مبرهنة (8)

$\because \overleftrightarrow{AC} \perp (Y)$ (معطى) $\Rightarrow (F) \perp (Y)$

$\therefore \overleftrightarrow{DE} \perp (F)$ (نتيجة مبرهنة 8)

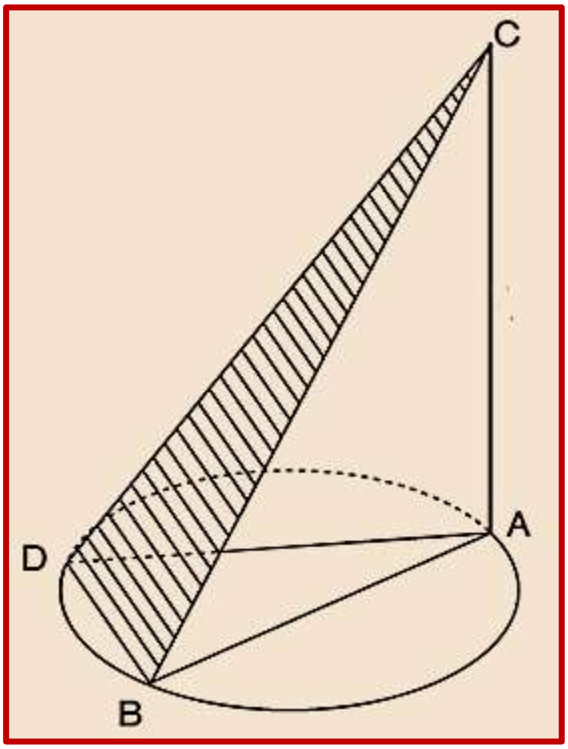
$\therefore \overleftrightarrow{DE} \perp (Z)$

(المستقيم العمودي على احد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الاخر)

و . هـ . م

س 6

دائرة قطرها AB ، AC عمودي على مستويها ، D نقطة تنتمي للدائرة . برهن ان (CDA) عمودي على (CDB)



المعطيات : دائرة قطرها $\overline{AB}$

$\overline{AC}$ عمودي على مستويها ، D نقطة تنتمي للدائرة

المطلوب $(CDA) \perp (CDB)$

البرهان

$\because \overline{AB}$ قطر الدائرة (معطى)

$\therefore \measuredangle ADB = 90^{\circ}$

(الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة قائمة)

$\because \overline{AC} \perp (ADB)$ (معطى)

$\overline{AD} \perp \overline{DB}$ بالبرهان

$\therefore \overline{CD} \perp \overline{DB}$ (مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

$\therefore \overline{CD} \perp \overline{DB}$ (مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

$\therefore \overline{DB} \perp (CDA)$

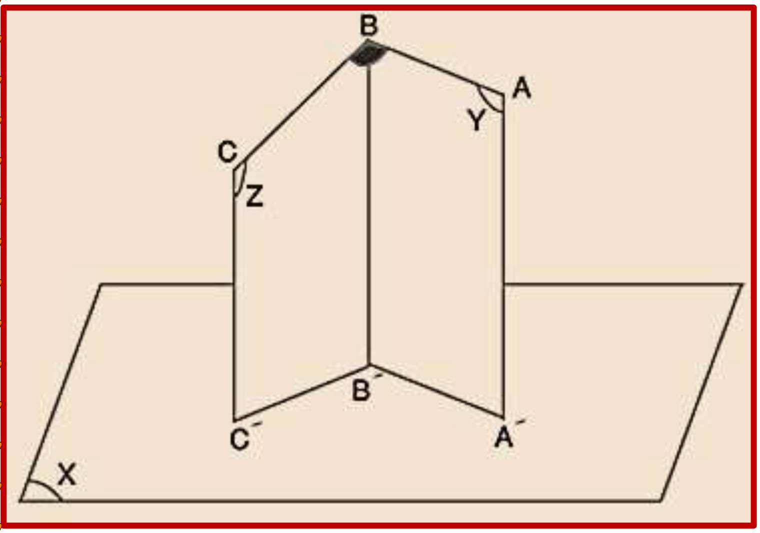
(المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على

$\therefore (CDA) \perp (CDB)$ (مبرهنة 8)

و . هـ . م

مثال 4

اذا وازى احد ضلعي زاوية قائمة مستويا معلوما فان مسقطي ضلعيهما على المستوي متعامدان



المعطيات

ABC زاوية قائمة في B

$\overline{AB}//(X)$ ،

$\overline{A'B'}$ هو مسقط $\overline{AB}$ على (X)

$\overline{B'C'}$ هو مسقط $\overline{BC}$ على (X)

المطلوب اثباته

$\overline{A'B'} \perp \overline{B'C'}$

البرهـــان

$\left.\begin{array}{l}\overline{A'B'} \text{ مسقط } \overline{AB} \\ \overline{B'C'} \text{ مسقط } \overline{BC}\end{array}\right\}$ معطى

$\Leftarrow \overline{CC'}, \overline{BB'}, \overline{AA'} \perp (X)$ (مسقط قطعة مستقيم على مستوٍ معلوم هو القطعة المحددة بأثري العمودين المرسومين على المستوي من طرفي القطعة المستقيمة) .

$\overline{AA'}//\overline{BB'}$ ، $\overline{BB'}//\overline{CC'}$ (المستقيمان العموديان على مستوٍ واحد متوازيان)

بالمستقيمين المتوازيين $\overline{BB'}$ ، $\overline{AA'}$ نعين (Y)
بالمستقيمين المتوازيين $\overline{CC'}$ ، $\overline{BB'}$ نعين (Z)
(لكل مستقيمين متوازيين يوجد مستوٍ وحيد يحتويهما)

لكن $\overline{AB}//(X)$ (معطى)

$(Y)\cap(X)=\overline{A'B'}$ (يتقاطع المستويان بخط مستقيم)

$\Leftarrow \overline{AB}//\overline{A'B'}$ (اذا وازى مستقيم مستوياً معلوماً فانه يوازي جميع المستقيمات الناتجة من تقاطع هذا المستوي والمستويات التي تحوي المستقيم)

كذلك $\overline{BB'} \perp \overline{A'B'}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي)

$\overline{AB} \perp \overline{BB'}$ (في المستوي الواحد : المستقيم العمودي على احد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر)

لكن $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ (لأن $\measuredangle ABC = 90°$ معطى M)

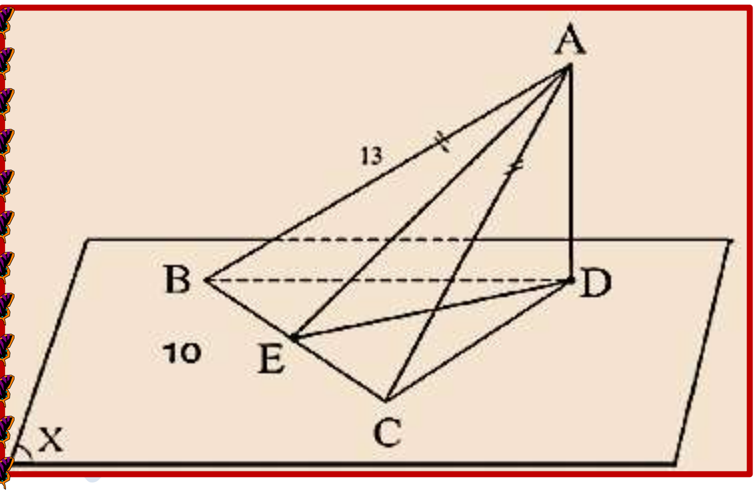
$\overline{AB} \perp (Z)$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

$\Leftarrow \overline{A'B'} \perp (Z)$ (المستوي العمودي على احد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر)

$\therefore \overline{A'B'} \perp \overline{B'C'}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي)

مثال 5

ABC مثلث ، $\overline{BC} \subset (X)$ والزاوية الزوجية بين مستوي المثلث ABC والمستوي (X) قياسها $60°$ فاذا كان $AB = AC = 13cm, BC = 10cm$ جد مسقط المثلث (ABC) على (X) ثم جد مساحة مسقط $\triangle ABC$ على (X)



المعطيات

$\triangle ABC, \overline{BC} \subset (X)$

قياس $(ABC) - \overline{BC} - (X) = 60°$

$AB = AC = 13, BC = 10$

المطلوب اثباته

ايجاد مسقط $\triangle ABC$ على (X) وايجاد مساحة مسقط $\triangle ABC$ على (X)

وبما أن $AC = AB$ (معطى)

$\therefore EC = BE = 5cm$ (العمود النازل من راس مثلث متساوي الساقين على القاعدة ينصفها)

البرهان

نرسم $\overline{AD} \perp (X)$ في D (يمكن رسم عمود على مستوي من نقطة معلومة)

$\therefore \overline{CD}$ مسقط $\overline{AC}$
$\overline{BD}$ مسقط $\overline{AB}$
$\overline{BC}$ مسقط نفسه على (X)

(مسقط قطعة مستقيم على مستو معلوم هو القطعة المحددة بأثري العمودين المرسومين على المستوي من طرفي القطعة المستقيمة)

$\therefore \triangle BCD$ مسقط $\triangle ABC$ على (X)

في (ABC) نرسم $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ في E (في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم عمود على آخر من نقطة معلومة)

وبما أن $AC = AB$ (معطى)

$\therefore EC = BE = 5cm$ (العمود النازل من راس مثلث متساوي الساقين على القاعدة ينصفها)

$\therefore \overline{ED} \perp \overline{BC}$ (نتيجة مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

$\therefore \angle DEA$ عائدة للزوجية $\overline{BC}$ (تعريف الزاوية العائدة)

لكن قياس الزاوية الزوجية $\overline{BC} = 60°$ (معطى)

في $\triangle AEB$ القائم في E :

$$AE = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12cm$$

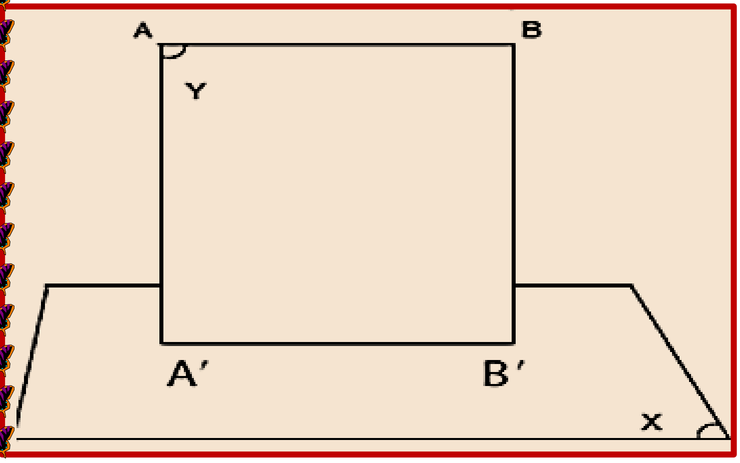
في $\triangle AED$ القائم في D

$$\cos 60° = \frac{ED}{AE} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{ED}{12} \Rightarrow ED = 6cm$$

$$\text{مساحة المثلث BCD} = \frac{1}{2} \times 10 \times 6 = 30cm^2$$

تمارين 2 - 6

س 1 برهن ان طول قطعة المستقيم الموازي لمستو معلوم يساوي طول مسقطه على المستوي المعلوم ويوازيه



المعطيات : $\overline{A'B'}$ هو مسقط $\overline{AB}$ على (X) , $\overline{AB}//(X)$

المطلوب : $\overline{AB}//\overline{A'B'}$, $AB = A'B'$

البرهان : $\because$ $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ عمودان على (X) (تعريف المسقط)

(المستقيمان العموديان على مستوٍ واحد متوازيان) $\therefore \overline{AA'}//\overline{BB'}$

$\therefore$ $\overline{BB'}$ ، $\overline{AA'}$ بالمستقيمين المتوازيين (Y) تعين المستوي

(لكل مستقيمين متوازيين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما)

$\because \overline{AB}//(X)$ (معطى)

$\overline{AB}//\overline{A'B'}$

(اذا وازى مستقيم مستوياً فانه يوازي جميع المستقيمات الناتجة من تقاطع هذا المستوي مع المستويات التي تحوي هذا المستقيم)

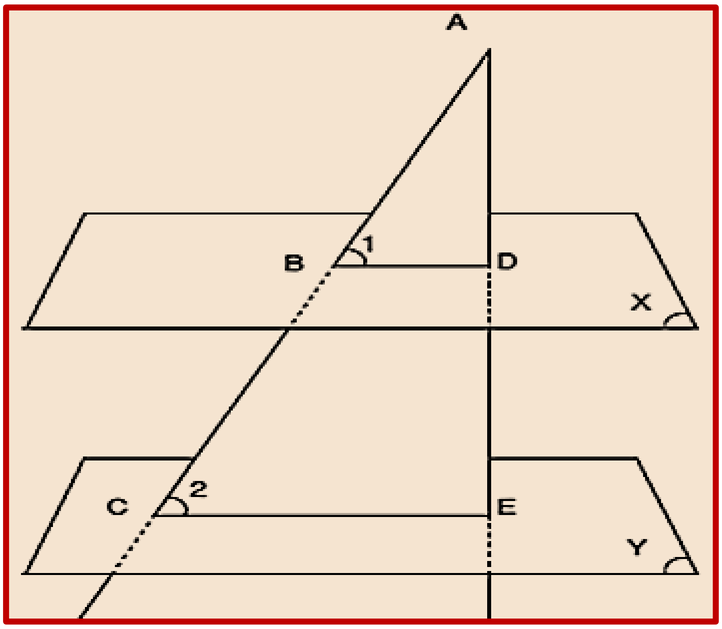
$\therefore ABB'A'$ متوازي اضلاع (لتوازي كل ضلعين متقابلين فيه)

(يتساوى طولا الضلعين المتقابلين في متوازي الاضلاع) $\therefore AB = A'B'$

(و.هـ.م)

س 2

برهن ان اذا قطع مستويان بمستقيم فان ميله على احدهما يساوي ميله على الأخر .



المعطيات : $(Y)//(X)$, $\overleftrightarrow{AC}$ يقطع (X) في نقطة B ويقطع (Y) في نقطة C

المطلوب : ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (X) = ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (Y)

البرهان : نرسم $\overleftrightarrow{AD} \perp (X)$ (يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوي من نقطة معلومة) اذن $(Y) \perp \overleftrightarrow{AD}$ في E

(المستقيم العمودي على احد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الاخر)

$\therefore \overline{DB}$ هو مسقط $\overline{AB}$ على (X)

$\overline{EC}$ هو مسقط $\overline{AC}$ على (Y) (تعريف مسقط قطعة مستقيم)

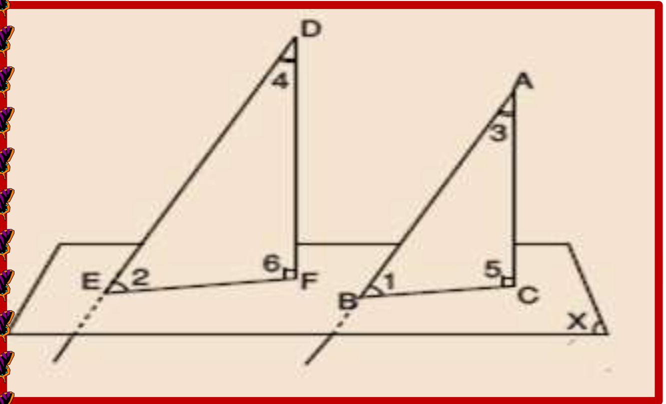
$\measuredangle 1$ هي زاوية ميل $\overline{AB}$ على (X) (زاوية الميل : هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطه على المستوي)

$\measuredangle 2$ هي زاوية ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (Y)

$m\measuredangle 1 = m\measuredangle 2$ (متناظرة)

$\therefore$ ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (X) = ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (Y) (و.هـ.م.)

س 3 برهن على ان للمستقيمات المتوازية المائلة على مستو الميل نفسه



المعطيات : $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{DE}$

$\measuredangle 1$ هي زاوية ميل $\overleftrightarrow{AB}$ على (X)

$\measuredangle 2$ هي زاوية ميل $\overleftrightarrow{DE}$ على (X)

المطلوب : $m\measuredangle 1 = m\measuredangle 2$

البرهان : $\because$ $\measuredangle 1$ ، $\measuredangle 2$ هما زاويتي ميل $\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{DE}$

$\therefore$ $\overline{BC}$ مسقط $\overline{AB}$ على (X) (زاوية ميل مستقيم على مستوي هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطه على المستوي)

$\overline{EF}$ مسقط $\overline{DF}$ على (X)

$\therefore \overline{AC} \perp (X), \overline{DF} \perp (X)$

$\overline{AC} \perp \overline{BC}, \overline{DF} \perp \overline{EF}$

(المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من اثره في ذلك المستوي)

$\therefore m\measuredangle 5 = m\measuredangle 6$ (قوائم)

$\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{DE}$ (معطى)

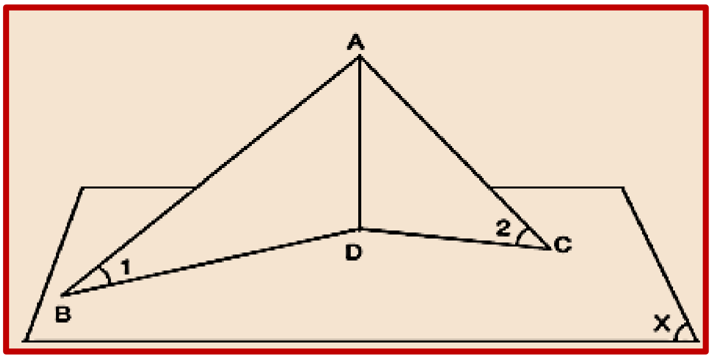
$\overline{AC} // \overline{DF}$ (المستقيمان العموديان على مستو واحد متوازيان)

(اذا وازى ضلعا زاوية اخرى تساوي قياسهما)

$\therefore m\measuredangle 3 = m\measuredangle 4$

$\therefore m\measuredangle 1 = m\measuredangle 2$ (لان مجموع زوايا المثلث 180^0) (و.هـ.م)

س 4 برهن على انه اذا رسم مائلان مختلفان من نقطة لا تنتمي الى مستوٍ معلوم فان اطولهما تكون زاوية ميله على المستوي اصغر من زاوية ميل الاخر عليه



المعطيات : $\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{AB}$ مائلان على (X) ، $AB > AC$

المطلوب : زاوية ميل $\overleftrightarrow{AB}$ على (X) أصغر من زاوية ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (X)

البرهان : نرسم $\overleftrightarrow{AD} \perp (X)$

(يمكن رسم عمود واحد فقط على مستوٍ من نقطة معلومة)

فيكون $\overline{BD}$ هو مسقط $\overline{AB}$ على (X)

$\overline{CD}$ هو مسقط $\overline{AC}$ على (X)

(مسقط قطعة مستقيم غير عمودي على مستوي هو قطعة المستقيم الواصلة بين أثري العمودين المرسومين من طرفي القطعة على المستوي)

$\measuredangle 1$ هي زاوية ميل $\overline{AB}$ على (X)

$\measuredangle 2$ هي زاوية ميل $\overline{AC}$ على (X)

(زاوية الميل : هي الزاوية المحدده بالمائل ومسقطه على المستوي)

$\because AB > AC$ (معطى)

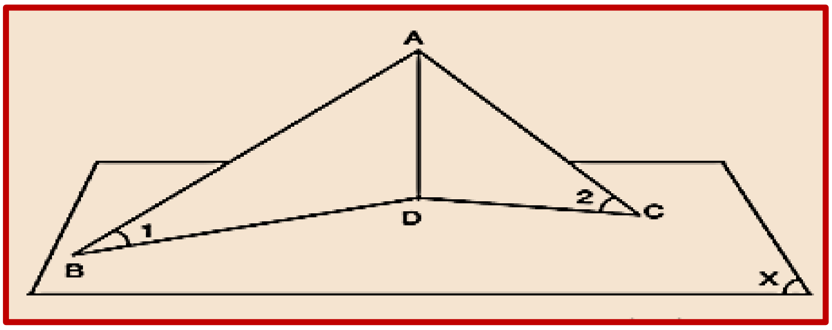
$\frac{1}{AB} < \frac{1}{AC}$ (خواص التباين)

$\frac{AD}{AB} < \frac{AD}{AC}$

$\sin \measuredangle 1 < \sin \measuredangle 2$ $\quad$ $\measuredangle 1 , \measuredangle 2$ زوايا حادة

$\therefore m\measuredangle 1 < m\measuredangle 2$ $\quad$ (و.هـ.م)

س 5 برهن على انه اذا رسم مائلان من نقطة ما الى مستو فاصغرهما ميلا هو الاطول



المعطيات : $\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{AB}$ مائلان على (X)
$\measuredangle 1$ هي زاوية ميل $\overleftrightarrow{AB}$ على (X)
$\measuredangle 2$ هي زاوية ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (X)
$m\measuredangle 1 < m\measuredangle 2$.

المطلوب : $AB > AC$

البرهان :

$\because$ $\measuredangle 1$ ، $\measuredangle 2$ هما زاويتي ميل $\overline{AC}, \overline{AB}$ على (X) على الترتيب
$\therefore$ $\overline{BD}$ هو مسقط $\overline{AB}$ على (X)
$\overline{CD}$ هو مسقط $\overline{AC}$ على (X)
(زاوية ميل مستقيم على مستوي هي الزاوية المحدده بالمائل ومسقطه على المستوي)

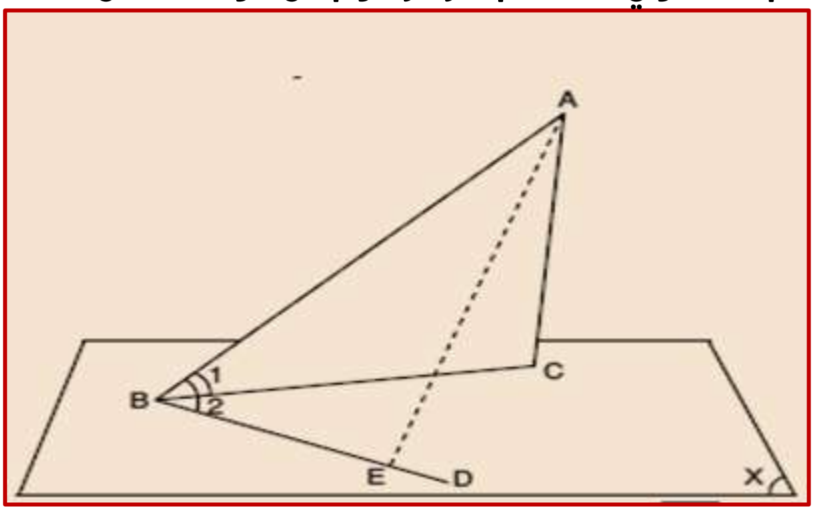
نرسم $\overleftrightarrow{AD} \perp (X)$ $\therefore$
(مسقط قطعة مستقيم غير عمودية على مستوي هي قطعة المستقيم المحدده بين أثري العمودين المرسومين من طرفي تلك القطعة على المستوي)
$\therefore \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{BD}, \overleftrightarrow{CD}$
(المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره في ذلك المستوي)

$\because m\measuredangle 1 < m\measuredangle 2$ (معطى)
$\therefore \sin\measuredangle 1 < \sin\measuredangle 2$

$$\frac{AD}{AB} < \frac{AD}{AC} \Rightarrow \frac{1}{AB} < \frac{1}{AC} \Rightarrow AB > AC$$ (خواص التباين)

(و.هـ.م)

س 6 برهن على ان الميل بين المستقيم ومسقطه على مستو اصغر من الزاوية المحصورة بين المستقيم نفسه واي مستقيم اخر مرسوم من موقعه ضمن ذلك المستوي



المعطيات : ليكن $\overline{BC}$ مسقط $\overline{AB}$ على (X)

$\measuredangle ABC$ زاوية الميل ، $\overline{BD} \subset (X)$

المطلوب : $m\measuredangle ABC < m\measuredangle ABD$

البرهان : لتكن $E \in \overline{BD}$ بحيث $BC = BE$

نصل $\overline{AE}$

$\because \overleftrightarrow{AC} \perp (X)$ (تعريف المسقط)

$AC < AE$

(العمود : هو أقصر مسافة بين نقطة ومستوي)

$BC = BE$ (بالعمل) ، $AB = AB$ (مشترك)

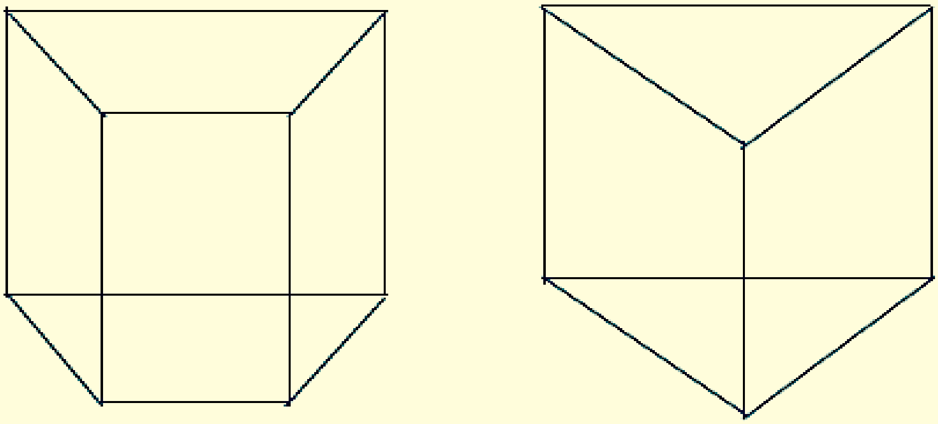
$\therefore m\measuredangle 1 < m\measuredangle 2$

(اذا ساوى ضلعا مثلث ضلعي مثلث آخر وأختلف الضلعان الآخران فاصغرهما يقابل أصغر الزاويتين)

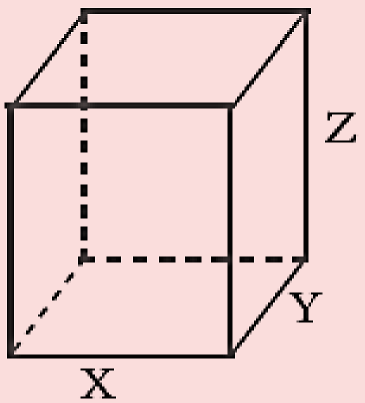
(و.هـ.م.)

المجسمات (Solid)

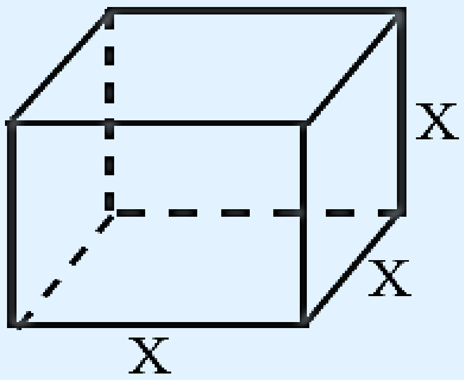
1) الموشور (المنشور) القائم (Right Prism)

الرسم Diagram	
الحجم Volume	مساحة القاعدة × الارتفاع
المساحة الجانبية Lateral Area	مجموع مساحات الاوجه الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع
المساحة الكلية Total Area	المساحة الجانبية + مساحة قاعدتين

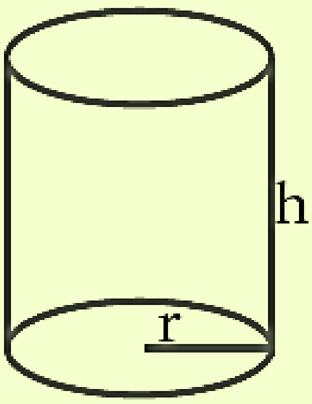
2) متوازي السطوح المستطيلة (متوازي المستطيلات) (ParallelPiped)

الرسم Diagram	
Volume الحجم	$V = x\,y\,z$
Lateral Area المساحة الجانبية	$L.A = 2(x+y)z$
Total Area المساحة الكلية	$T.A = 2(x+y)z + 2xy$

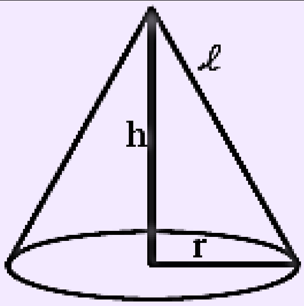
3) المكعب (Cube)

الرسم Diagram	
Volume الحجم	$V = x^3$
Lateral Area المساحة الجانبية	$L.A = 4x^2$
Total Area المساحة الكلية	$T.A = 6x^2$

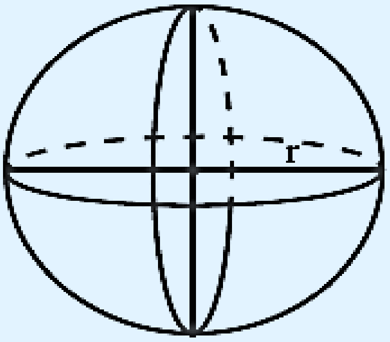
4) الاسطوانة الدائرية القائمة (Right Circular Cylinder)

الرسم Diagram	
Volume الحجم	$V = \pi r^2 h$
Lateral Area المساحة الجانبية	$L.A = 2\pi rh$
Total Area المساحة الكلية	$T.A = 2\pi rh + 2\pi r^2$

6) المخروط الدائري القائم (Right Circular Cone)

الرسم Diagram	
الحجم Volume	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
المساحة الجانبية Lateral Area	$L.A = \pi r \ell$
المساحة الكلية Total Area	$T.A = \pi r \ell + \pi r^2$

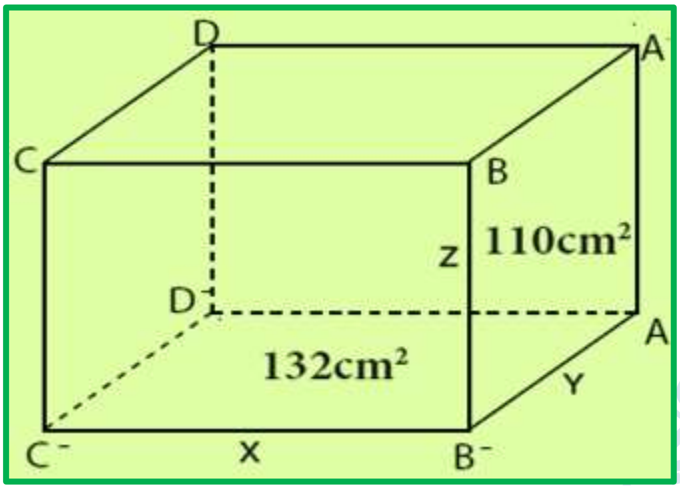
7) الكرة (Sphere)

الرسم Diagram	
الحجم Volume	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
مساحة سطح الكرة	مساحة سطح الكرة = مساحة 4 دوائر عظيمة = $4\pi r^2$ $S = 4\pi r^2$

تمارين 3 - 6

س 1

اذا كانت المساحة الكلية لمتوازي المستطيلات $= 724\ cm^2$ ومساحة قاعدته $132\ cm^2$ ومساحة احد اوجهه الجانبية $= 110\ cm^2$ جد حجمه ؟



المعطيات :متوازي المستطيلات

مساحته الكلية $=724cm^2$

ومساحة قاعدته $= 132cm^2$

ومساحة احد اوجهه الجانبية $= 110cm^2$

المطلوب : ايجاد حجمه

البرهان : نفرض أبعاده x,y,z

مساحة الوجهين المتقابلين $724-(2\times132+2\times110) = (BC'),(AD')$

$$724-(264+220)=724-484=240cm^2$$

$\therefore$ مساحة الوجه (BC') هي $\frac{240}{2}=120cm^2$

$$\therefore x.y=132......(1)$$
$$y.z=110.......(2)$$
$$x.z=120.......(3)$$

وبضرب المعادلات الثلاثة $\Rightarrow x^2y^2z^2=132\times110\times120$

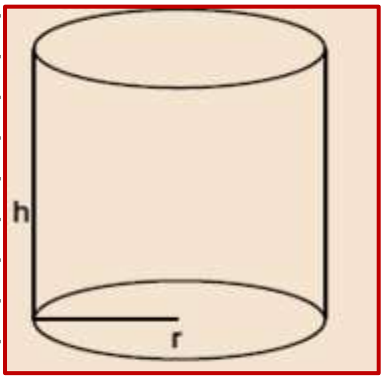
$$(xyz)^2=12\times11\times10\times11\times10\times12$$

وبجذر الطرفين $xyz=12\times11\times10$

$$\therefore v=1320cm^3$$

س 2

اسطوانة دائرية قائمة مساحتها الجانبية $400\ \pi\ cm^2$ وحجمها $2000\ \pi\ cm^2$ اوجد ارتفاعها ونصف قطر قاعدتها .



المعطيات :

اسطوانه دائريه قائمة مساحتها الجانبية = $400\pi\, cm^2$

وحجمها = $2000\pi\, cm^3$

المطلوب :ايجاد ارتفاعها ونصف قطر قاعدتها

البرهان :

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع $v=\pi r^2 h$

$$\therefore 2000\cancel{\pi} = \cancel{\pi} r^2 h \Rightarrow 2000 = r^2 h \ldots\ldots(1)$$

المساحة الجانبية للاسطوانة = محيط القاعدة × الارتفاع $L.A = 2\pi rh$

$$400\cancel{\pi} = 2\cancel{\pi} rh \xrightarrow{\div 2} 200 = rh \ldots\ldots(2)$$

بقسمة (1) على (2)

$$\frac{2000}{200} = \frac{r^2 h}{rh}$$

$r = 10cm$ نصف القطر

نعوض في (2)

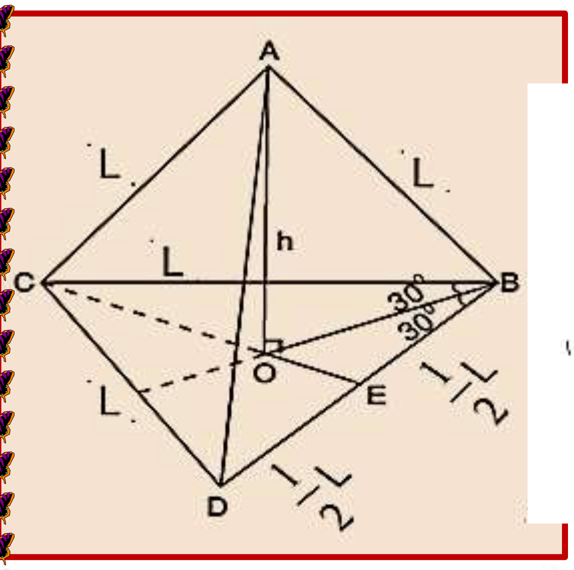
$200 = 10h$

$h = 20cm$ الارتفاع

(و.هـ.م.)

س 3

برهن على ان حجم ذي الاوجه الاربعة المنتظم والذي طول حرفه L وحدة هو $V = \sqrt{2}\ L^3 / 12$ وحده مكعبة .



المعطيات :

A-BCD ذو الوجوه الاربعة المنتظم

وطول حرفه L

المطلوب : $v=\frac{\sqrt{2}L^3}{12}$

البرهان : القاعدة BCD مثلث متساوي الاضلاع

نرسم الاعمدة المنصفة للاضلاع فتلتقي في نقطة O

في مثلث BOE القائم في E

$$\cos 30° = \frac{BE}{BO} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{1}{2}L}{BO}$$

$$\sqrt{3}BO = L \Rightarrow BO = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

$$(AB)^2 = (AO)^2 + (OB)^2 \quad \text{(فيثاغورس)}$$

$$L^2 = h^2 + \left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right)^2 \Rightarrow h^2 = L^2 - \frac{L^2}{3} = \frac{2L^2}{3} \Rightarrow \therefore h = \frac{\sqrt{2}L}{\sqrt{3}}$$ وحدة

حجم الهرم $= \frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

مساحة المثلث BCD تساوي $\frac{\sqrt{3}}{4}L^2$

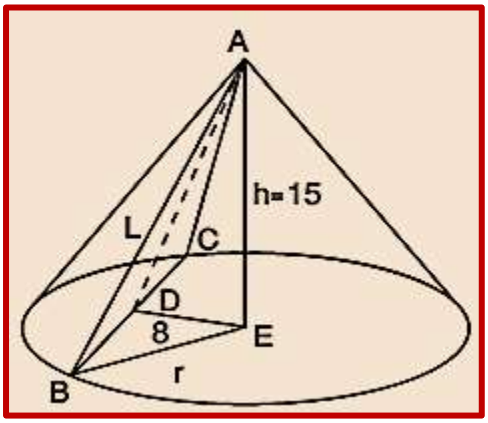
(b: مساحة القاعدة)

$$v = \frac{1}{3}bh$$

$$\therefore v = \frac{1}{3} \times \frac{\cancel{\sqrt{3}}}{4}L^2 \times \frac{\sqrt{2}L}{\cancel{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2}L^3}{12}$$ وحدةمكعبة

س 4

مخروط دائري قائم مر برأسه مستو فقطع قاعدته بقطعة مستقيم تبعد عن مركز القاعده بمقدار 8 cm فاذا كانت المقطع = $120\ cm^2$ وارتفاع المخروط 15 cm احسب : ❶ حجمه ❷ مساحته الجانبية ❸ مساحته الكلية



المعطيات : مخروط دائري مر مستوي برأسه A فقطع قاعدته في $\overline{BC}$ والتي تبعد عن المركز 8cm ، مساحة المقطع $h = 15cm, ABC = 102cm^2$

المطلوب :1 – الحجم 2 – المساحة الجانبية 3 – المساحة الكلية

البرهان : في مثلث AED القائم في E

(المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي)

$(AD)^2 = 15^2 + 8^2 = 225 + 64 = 289$ (فيثاغورس)

$\therefore AD = \sqrt{289} = 17cm$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AE} \perp \text{مستوي القاعدة} \\ \overline{ED} \perp \overline{BC} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{AD} \perp \overline{BC}$$ (مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

مساحة المثلث ABC تساوي $\frac{1}{2} BC \times AD$

$102 = \frac{1}{2} BC \times 17 \Rightarrow BC = \frac{(102)(2)}{17} = 12cm$

$\therefore BD = CD = 6cm$ (العمود النازل من مركز دائرة على وتر فيها ينصفه)

في مثلث EDB القائم في D

$r^2 = 8^2 + 6^2 = 100$ (فيثاغورس)

$\therefore r = 10cm$

في مثلث AEB القائم في E (فيثاغورس)

$L^2 = 15^2 + 10^2 = 325$

$\therefore L = \sqrt{325} = 5\sqrt{13}\ cm$

$1)V = \frac{1}{3}\pi \times 100 \times 15 = 500\pi \ \ cm^3$ الحجم

المساحة الجانبية

$2)L.A = \pi r L = \pi \times 10 \times 5\sqrt{13} = 50\sqrt{13}\pi \ \ cm^2$

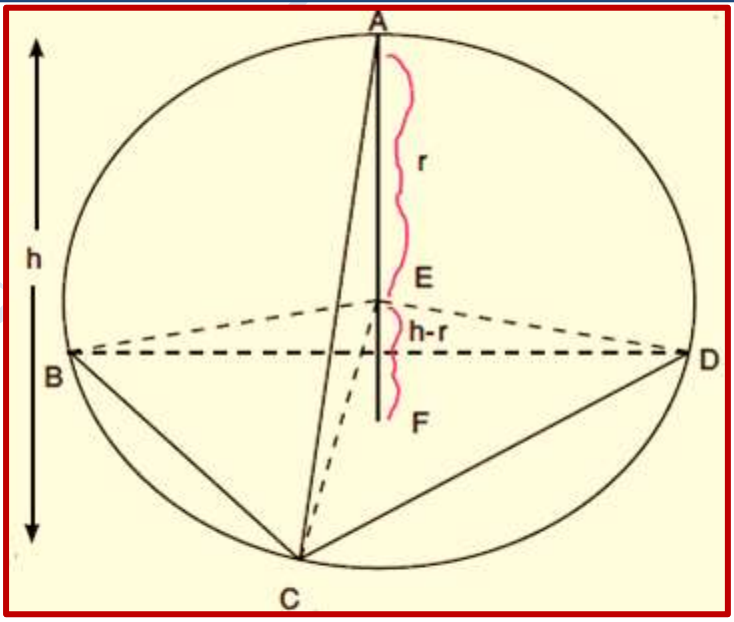
$3)T.A = \pi r L + \pi r^2 = 50\sqrt{13}\pi + 100\pi = 50\pi\left(\sqrt{13} + 2\right) \ \ cm^2$

المساحة الكلية

س 5

اذا علمت انه يمكن رسم كرة خارج ذي الاوجه الاربعة المنتظم .

برهن ان نصف قطر الكرة $= \frac{3}{4}$ الارتفاع .



المعطيات : $A - BCD$ شكل ذي اربع وجوه منتظم مرسوم داخل كره نصف قطرها =r

المطلوب : $r = \frac{3}{4}h$ (حيث h ارتفاع المخروط)

البرهان :

نصل مركز الكرة E برؤوس الهرم

$$AF = h, AE = r \Rightarrow EF = h - r$$

∴ ينقسم الهرم $A - BCD$ الى أربعة اهرامات متساوية بالحجم (لتساوي القاعدة والارتفاع) وهي

$$E - DCB, E - ABC, E - ACD, E - ABD$$

∴ حجم ذو الوجوه الاربعة = 4 × حجم الهرم $E - DCB$

لتكن مساحة القاعدة= b

$$\therefore \frac{1}{3}\cancel{b}.h = 4 \times \frac{1}{3}\cancel{b}(h - r)$$

$$h = 4h - 4r$$

$$4r = 3h$$

$$r = \frac{3}{4}h$$

(و.هـ.م)

والسلام عليكم ورحمة الله وبركاته

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

الاستاذ

حسين عبد زيد